Mathematisches Institut LMU München
WiSe 2011/12
Martin Gebert, Ingo Wagner
Priv.-Doz. Dr. Heribert Zenk 4. November 2011

Mathematik I für Physiker
Tutorienblatt 4

Aufgabe 1: Direktes Produkt
Seien G, H Gruppen mit den Verknüpfungen $*_G$ bzw. $*_H$. Zeige $G \times H$ mit der Verknüpfung $(a,x)*(b,y) := (a *_G b, x *_H y)$ $\forall a, b \in G$ und $x, y \in H$ definiert eine Gruppe.

Aufgabe 2:
Für $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ definiere

$$(k,l) \sim (m,n) :\Leftrightarrow \; k + n = l + m$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert.

b) Zeige, dass auf $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})\backslash_\sim$ durch

$$[(k,l)]_\sim + [(m,n)]_\sim := [(k+m, l+n)]_\sim$$

eine Abbildung $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert wird, die $(\mathbb{Z}, +)$ zu einer kommutativen Gruppe macht.

Aufgabe 3: Untergruppen der S_n
Sei G eine endliche Gruppe, i.e. $|G| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige es gibt $H \subset S_n$ Untergruppe, sodass $H \cong G$ isomorph ist.
Hinweis: Beachte, dass $S_n \cong S(G)$ und finde injektiven Homomorphismus (Einbettung) von G nach $S(G)$.

Aufgabe 4: Zyklendarstellung

a) Gebe die Zyklendarstellung der folgenden Elemente der S_5 an.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) Schreibe in dijunkten Zyklen

(a) (1 2 4 5)(2 3 1)

(b) (2 3 4)(1 5 2 4)(1 2)

T 12 | Direktes Produkt

Satz: Seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$. Dann ist $G \times H$ mit der Verknüpfung $(a,x) * (b,y) := (a *_G b, x *_H y)$ für alle $a, b \in G$ und $x, y \in H$ eine Gruppe.

Beweis: 1) Assoziativität der Multiplikation

Seien $a, b, c \in G$ und $x, y, z \in H$ beliebig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
((a,x) * (b,y)) * (c,z) &= (a *_G b, x *_H y) * (c,z) \\
&= ((a *_G b) *_G c, (x *_H y) *_H z) \\
&= (a *_G (b *_G c), x *_H (y *_H z)) \\
&= (a,x) * (b *_G c, y *_H z) \\
&= (a,x) * ((b,y) * (c,z)) .
\end{aligned}
$$

2) Existenz eines neutralen Elements

e_G sei neutrales Element von G

e_H sei neutrales Element von H

Dann ist (e_G, e_H) neutrales Element von $G \times H$, denn für alle $a \in G$ und $b \in H$ gilt

$$
\begin{aligned}
(e_G, e_H) * (a,x) &= (e_G *_G a, e_H *_H x) \\
&= (a, x) \\
&= (a *_G e_G, x *_H e_H) \\
&= (a,x) * (e_G, e_H) .
\end{aligned}
$$

3) Existenz inverser Elemente

Sei $a^{-1} \in G$ das inverse Element zu $a \in G$.
Sei $x^{-1} \in H$ das inverse Element zu $x \in H$
Dann ist $(a^{-1}, x^{-1}) \in G \times H$ das inverse Element zu $(a, x) \in G \times H$, denn

$$
\begin{aligned}
(a^{-1}, x^{-1}) * (a, x) &= (a^{-1} *_G a \, , \, x^{-1} *_H x) \\
&= (e_G \, , \, e_H) \\
&= (a *_G a^{-1} \, , \, x *_H x^{-1}) \\
&= (a, x) * (a^{-1}, x^{-1})
\end{aligned}
$$

■

T 13

Ganze Zahlen

Voraussetzung: Für $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ sei $\sim$ die Relation, die durch

$$(k,l) \sim (m,n) :\Leftrightarrow k+n = l+m$$

auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert ist.

a) Satz: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis: 1) **Reflexivität**: Sei $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$k+l = k+l.$$

Es gilt also $(k,l) \sim (k,l)$ für alle $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) **Symmetrie**: Seien $(k,l), (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und es gelte $(k,l) \sim (m,n)$.

$$\begin{aligned}
& (k,l) \sim (m,n) \\
\Leftrightarrow\ & k+n = l+m \\
\Leftrightarrow\ & m+l = n+k \\
\Leftrightarrow\ & (m,n) \sim (k,l)
\end{aligned}$$

3) **Transitivität**: Seien $(k,l), (m,n), (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und es gelte $(k,l) \sim (m,n)$ sowie $(m,n) \sim (p,q)$

$$(k,l) \sim (m,n) \Leftrightarrow k+n = l+m$$

$$(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow m+q = n+p$$

$$\begin{aligned}
& (k+n)+q = (l+m)+q = l+(m+q) = l+(n+p) \\
\Leftrightarrow\ & n+(k+q) = n+(l+p) \\
\underset{\text{Kürzungsregel}}{\Rightarrow}\ & k+q = l+p \\
\Leftrightarrow\ & (k,l) \sim (p,q)
\end{aligned}$$

b) Satz: Durch $[(k,l)]_\sim + [(m,n)]_\sim := [(k+m, l+n)]_\sim$
wird eine Verknüpfung auf $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$ definiert,
die $(\mathbb{Z}, +)$ zu einer kommutativen Gruppe macht.

Beweis: 1) Wohldefiniertheit
Seien $[(k_1,l_1)]_\sim = [(k_2,l_2)]_\sim$ und $[(m_1,n_1)]_\sim = [(m_2,n_2)]_\sim$, d.h.

$$k_1 + l_2 = l_1 + k_2 \quad \text{und} \quad m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

Dann folgt, da $(k_1+m_1)+(l_2+n_2) = (l_1+n_1)+(k_2+m_2)$

$$\begin{aligned}
[(k_1,l_1)]_\sim + [(m_1,n_1)]_\sim &= [(k_1+m_1, l_1+n_1)]_\sim \\
&= [(k_2+m_2, l_2+n_2)]_\sim \\
&= [(k_2,l_2)]_\sim + [(m_2,n_2)]_\sim
\end{aligned}$$

2) Assoziativität: Für $(k_1,l_1), (k_2,l_2), (k_3,l_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&[(k_1,l_1)]_\sim + \left([(k_2,l_2)]_\sim + [(k_3,l_3)]_\sim\right) \\
&= [(k_1,l_1)]_\sim + [(k_2+k_3, l_2+l_3)]_\sim \\
&= [(k_1+(k_2+k_3), l_1+(l_2+l_3))]_\sim \\
&= [((k_1+k_2)+k_3, (l_1+l_2)+l_3)]_\sim \\
&= [(k_1+k_2, l_1+l_2)]_\sim + [(k_3,l_3)]_\sim \\
&= \left([(k_1,l_1)]_\sim + [(k_2,l_2)]_\sim\right) + [(k_3,l_3)]_\sim
\end{aligned}$$

3) Kommutativität: Für $(k,l), (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
[(k,l)]_\sim + [(m,n)]_\sim &= [(k+m, l+n)]_\sim \\
&= [(m+k, n+l)]_\sim \\
&= [(m,n)]_\sim + [(k,l)]_\sim
\end{aligned}$$

4) Existenz eines neutralen Elements:

Es gilt, dass $[(1,1)]_\sim$ ein neutrales Element der Addition ist, da für beliebiges $(k_1,l_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(k_2,l_2) := (k_1+1, l_1+1)$ folgt, dass $(k_1,l_1) \sim (k_2,l_2)$ da

$$k_1 + l_2 = k_1 + (l_1 + 1) = (k_1 + 1) + l_1 = l_1 + k_2 .$$

Es folgt

$$[(k_1,l_1)]_\sim + [(1,1)]_\sim = [(k_1+1, l_1+1)]_\sim = [(k_2,l_2)]_\sim = [(k_1,l_1)]_\sim$$

5) Existenz inverser Elemente

Zu $[(k,l)]_\sim \in \mathbb{Z}$ ist $[(l,k)]_\sim \in \mathbb{Z}$ ein neutrales Element, da $(1,1) \sim (n,n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, und somit folgt

$$[(k,l)]_\sim + [(l,k)]_\sim = [(k+l, l+k)]_\sim = [(1,1)]_\sim .$$

$\blacksquare$

T 14

Satz von Cayley

Satz: Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Dann gibt es eine Untergruppe H von S_n, die isomorph zu G ist.

Beweis: 1) Zu $g \in G$ sei $\varphi_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$. Dann gilt $\varphi_g \in S(G)$, d.h. φ_g ist Bijektion, da für $\varphi_{g^{-1}}$ und alle $h \in G$ gilt

$$\left.\begin{aligned}
&i)\ (\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(h) = \varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(h)) = g^{-1} \cdot (g \cdot h) \\
&\qquad = (g^{-1} \cdot g) \cdot h = e \cdot h = h \\
&\Rightarrow \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = id_G \\
&ii)\ (\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}})(h) = \varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(h)) = g \cdot (g^{-1} \cdot h) \\
&\qquad = (g \cdot g^{-1}) \cdot h = e \cdot h = h \\
&\Rightarrow \varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = id_G
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$$

2) Somit ist die Abbildung $\varphi : G \to S(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ wohldefiniert. φ ist ein Gruppenhomomorphismus, da für $g_1, g_2, h \in G$ beliebig gilt.

$$\varphi_{g_1 \cdot g_2}(h) = (g_1 \cdot g_2) \cdot h = g_1 \cdot (g_2 \cdot h)$$
$$= \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(h)) = (\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})(h)$$

3) φ ist injektiv, denn falls $\varphi_{g_1} = \varphi_{g_2}$ für $g_1, g_2 \in G$ folgt

$$g_1 = g_1 \cdot e = \varphi_{g_1}(e) = \varphi_{g_2}(e) = g_2 \cdot e = g_2$$

4) G ist somit isomorph zu einer Untergruppe $\hat{H}$ von $S(G)$. Aufgrund der Isomorphie von $S(G)$ zu S_n ist G isomorph zu einer Untergruppe H von S_n.

■

T15

a) Umschreiben in Zykelschreibweise

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (123)(4)(5) = (123)$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (13)(245)$

b) Umschreiben in disjunkte Zykel

(a) $\pi_1 := (1245) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_2 := (231) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$(1245)(231) = \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (13)(245)$

(b) $\pi_1 := (234) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\pi_2 := (1524) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_3 := (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (234)(1524)(12) &= \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (15)(23)(4) \\ &= (15)(23) \end{aligned}$$