QMI

Max Klinger

December 18, 2009

Exercise 14. *c) Definiere* $\hat{F}_L(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}$ *und* $\hat{F}_R(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}e^{\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ *(Beachte das fehlende Minus, hier war ein Fehler in der Angabe)*
Jetzt bilde wieder die Ableitung von beiden Seiten:

1. $\frac{d}{d\lambda}\hat{F}_L(\lambda) = \hat{A}\hat{F}_L(\lambda) + \hat{F}_L(\lambda)\hat{B} \Rightarrow$ [1]

$$\begin{aligned}\hat{F}_L(\lambda)^{-1}\frac{d}{d\lambda}\hat{F}_L(\lambda) &= e^{-\lambda\hat{B}}e^{-\lambda\hat{A}}\hat{A}e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}\hat{F}_L(\lambda) + \hat{B} = {}^{2} \\ &= e^{-\lambda\hat{B}}\hat{A}e^{\lambda\hat{B}}\hat{F}_L(\lambda) + \hat{B} \overset{b)}{=} e^{-\lambda L_{\hat{B}}}(\hat{A}) + \hat{B}\end{aligned}$$

Jetzt schreiben wir $e^{-\lambda L_{\hat{B}}}(\hat{A})$ *als Potenzreihe und benutzen, dass* $[\hat{A},\hat{B}]$ *laut Angabe mit* $\hat{A}$ *und* $\hat{B}$ *kommutiert, also* $L^n_{\hat{B}}([\hat{B},\hat{A}]) = [\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]] = 0$*:* $e^{-\lambda L_{\hat{B}}}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}L^n_{\hat{B}}(\hat{A}) = \hat{A} - \lambda[\hat{B},\hat{A}]$ *also* $\hat{F}_L(\lambda)^{-1}\frac{d}{d\lambda}\hat{F}_L(\lambda) = \hat{A} + \hat{B} + \lambda[\hat{A},\hat{B}]$

2.

$$\begin{aligned}\hat{F}_R(\lambda)^{-1}\frac{d}{d\lambda}\hat{F}_R(\lambda) &= e^{\frac{-\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}e^{-\lambda(\hat{A}+\hat{B})}\Big((\hat{A}+\hat{B})e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}e^{\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]} + \\ &\lambda e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}[\hat{A},\hat{B}]e^{\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\Big) \\ &= {}^{3}\hat{A} + \hat{B} + \lambda[\hat{A},\hat{B}]\end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie vorher, nämlich dass die Differentialgleichung für beide Seiten gleich ist und die Anfangswerte ($\hat{F}_L(0) = \mathbb{1} = \hat{F}_R(0)$) *übereinstimmen folgern wir aus dem Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen das die Lösungen identisch sind.*

[1] Multipliziere $\hat{F}_L(\lambda)^{-1}$ von links
[2] $\hat{A}$ und $e^{\pm\hat{A}}$ kommutieren
[3] da $[\hat{A},\hat{B}]$ mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutiert steht dem bei $\hat{A}+\hat{B}$ auch nichts im Wege

d) Hierzu nur die Kommutatoren die mich verwirrt haben an der Tafel

$$L_{\hat{H}}(\hat{p}) = [\hat{p}^2/2m + 1/2m\omega^2\hat{x}^2, \hat{p}] = \underbrace{[\hat{p}^2/2m, \hat{p}]}_{=0} + [1/2m\omega^2\hat{x}^2, \hat{p}] =$$

$$= 1/2m\omega^2[\hat{x}^2, \hat{p}] = \text{[4]}\, 1/2m\omega^2(\hat{x}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}) = i\hbar m\omega^2\hat{x}$$

$$L^2_{\hat{H}}(\hat{p}) = [\hat{H}, L_{\hat{H}}(\hat{p})] = [\hat{p}^2/2m + 1/2m\omega^2\hat{x}^2, m\omega^2 i\hbar\hat{x}] = 1/2\omega^2 i\hbar[\hat{p}^2, \hat{x}] + \underbrace{[1/2m\omega^2\hat{x}^2, \hat{x}]}_{=0} =$$

$$= 1/2i\hbar\omega^2[\hat{p}^2, \hat{x}] = \text{[4]}\, 1/2\hbar\omega^2(\hat{p}[\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}]\hat{p}) = i\hbar\omega^2(-2\hbar i\hat{p}) = \hbar^2\omega^2\hat{p}$$

[4]

[4] vgl. http://en.wikipedia.org/wiki/Commutator#Identities_2