Tutorium 1 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

2. Bestimme die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

3. Eine reelle $3 \times 3-$Matrix heißt magisches Quadrat, wenn die Summen aus den Einträgen in Zeilen, Spalten und Diagonalen einander gleich sind. Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller magischen Quadrate und $\mathcal{M}(\lambda)$ die Menge aller magischen Quadrate mit Zeilensumme λ
   a) Zeige, dass $\mathcal{M}(0)$ und $\mathcal{M}$ Untervektorräume von $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sind.
   b) Zeige, dass man jede vorgegebene erste Zeile $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ auf genau eine Weise zu einem magischen Quadrat ergänzen kann und bestimme damit eine Basis von $\mathcal{M}$ und von $\mathcal{M}(0)$
   c) Wie sieht "das" magische Quadrat aus, das nur die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ enthält?

Lösung

1) Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-I]{\substack{\text{II - 3· I} \\ \text{III-I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-II]{III-2\cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|b')$$

Daraus können wir ablesen: $\operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(A'|b') = 3$, $\dim\ker A' = 1$
Gleichungssystem für alle Unbekannten mit einem Pivotelement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 1 & & \\ x_2 + x_3 &= 1 & &\Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 & &\Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lös}(A'|0) = \left\{ \begin{pmatrix} 4\lambda \\ -2\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K \right\} = \text{Lös}(A|2) \ \text{Lös}\ (A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2+4\lambda \\ 1-2\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K \right\}$$

2)

$$
\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 9 & 9 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 13 & 11 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 3 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 27 & -18 & -13 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{array}
$$

3) a) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = a_{11} + a_{12} + a_{13} = \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a_{11} + a_{21} + a_{31} = \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} \end{array} \right\}$

$\mathcal{M}(\lambda) = \{A \in \mathcal{M} : a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda\}$ $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}(0) \subseteq M_3(\mathbb{R}^3)$ Untervektorräume

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ [bzw $A, B \in \mathcal{M}(0)$] und

$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A, \mu B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\lambda a_{11} + \lambda a_{22} + \lambda a_{33} + \mu b_{11} + \mu b_{22} + \mu b_{33} = \lambda a_{13} + \lambda a_{23} \lambda a_{31} + \mu b_{13} + \mu b_{22} + \mu b_{31} = \cdots =$
$\lambda a_{13} + \lambda a_{23} + \lambda a_{33} + \mu b_{13} + \mu b_{23} + \mu b_{33} \quad [= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \text{ falls } A, B \in \mathcal{M}(0)]$,

d.h. $\mathcal{M}, \mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Untervektorräume

b) Bestimme ein magisches Quadrat mit vorgegebener 1. Zeile:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit folgendes Gleichungssystem für die Unbekannten $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 + x_1 + x_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =: \lambda \\
&\lambda_2 + x_2 + x_5 = \lambda \\
&\lambda_3 + x_3 + x_6 = \lambda \\
&x_4 + x_5 + x_6 = \lambda \\
&x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\
&\lambda_1 + x_2 + x_6 = \lambda \\
&\lambda_3 + x_2 + x_4 = \lambda
\end{aligned}
$$

Als Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda-\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{VII- IV -II}]{\substack{\text{V -(I + II +III)} \\ \text{VI - II}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \lambda-3\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -\lambda+\lambda_2-\lambda_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{VII } -2\cdot \text{ VI}]{\text{V + IV}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -3 & -\lambda+\lambda_2-\lambda_3+2\lambda_1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{VII}\leftrightarrow\text{V}]{\text{V}\leftrightarrow\text{VI}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -3 & \lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{VII}\leftrightarrow\text{V}]{\text{V}\leftrightarrow\text{VI}}$$

$$\begin{aligned} x_6 =& \frac{1}{3}(-\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3) \\ x_5 =& x_6-\lambda_2+\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3) \\ x_4 =& \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-x_5-x_6 = \frac{1}{3}(2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3) \\ x_3 =& \lambda_1+\lambda_2-x_6 = \frac{1}{3}(4\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3) \\ x_2 =& \lambda_1+\lambda_3-x_5 = \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \\ x_1 =& \lambda_2+\lambda_3-x_4 = \frac{1}{3}(-2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3) \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ ist $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \frac{-2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3}{3} & \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3} & \frac{4\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3}{3} \\ \frac{2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3}{3} & \frac{2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3}{3} & \frac{-\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3}{3} \end{pmatrix}$

das magische Quadrat mit der ersten Zeile $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A_1 :=& A(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
A_2 :=& A(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
A_3 :=& A(0,0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

spannen $\mathcal{M}$ auf und sind linear unabhängig, also $\{A_1, A_2, A_3\}$ Basis von $\mathcal{M}$. Damit erhalten wir auch eine neue Beschreibung von

$$\mathcal{M}(0) = \{A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{M} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\} = \{A(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) \in \mathcal{M}\},$$

also ist z.B.

$$\left\{ A(-1,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{eine Basis von } \mathcal{M}(0)$$

c) Das magische Quadrat mit den Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8,9 erfüllt $3\lambda = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45; \lambda = 15$ d.h. $\lambda/3 = 5$ und damit $a_{22} = 5 = \lambda/3$. Starte nun mit den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$ z.B. $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6$ und bestimme $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$A(8,1,6) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \lambda_1, \lambda_2 = 6\lambda_3 = 8 \quad A(1,6,8) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 12 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Dies ist zwar ein magisches Quadrat, enthält aber nicht die Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Um alle diese zu finden bemerken wir, dass ein magisches Quadrat durch Vertauschen der 1. und 3. Zeile/Spalte wieder zu einem magishen Quadrat wird und mit A auch A^t ein magisches Quadraft ist. Für ein magisches Quadrat mit den Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dürfen wir also o.E.: $1 \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ annehmen, denn alle andere möglichen Platzierungen von 1 in der 3×3-Matrix lassen sich durch Transponieren, Vertauschen von 1. und 3. Zeile/Spalte auf eine solche Konstellation zrückführen (Beachte $a_{22} = 5$) $\Rightarrow$ Bis auf Transponieren, Vertauschen der 1. und 3. Zeile/Spalte ist $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ das magische Quadrat aus den Einträgen 1,2,3,4,5,6,7,8,9