Tutorium 10 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Zeige, dass die Gleichung $\cos x = x$ genau eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}$ besitzt.
   Hinweis:
   1) Wo kann x_* nur liegen?
   2*) Zum Abschätzen von $|\cos x - \cos y|$ darf man Kenntnisse aus den "Rechenmethoden" verwenden.

2. Zeige, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\bar{z} + \Re(z^2) + 1$ stetig ist. Wie sieht man die Stetigkeit von f in i mit dem $\epsilon - \delta-$Kriterium?

3. Wir versehen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ wie im letzten Tutorium mit der Metrik d:

$$d(x,y) := |f(x) - f(y)|\,; f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1], x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ 1 & x = \infty \\ -1 & x = -\infty \end{cases}$$

   Es sei $A :=]-1,0[\cup]0,1[\cup \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ und

$$h : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty & x = 0 \\ 0 & x = \pm\infty \end{cases} \qquad g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty & x = 0 \\ 0 & x = \pm\infty \end{cases}$$

   a) In welchen Punkten ist h, in welchen Punkten ist g stetig?
   b) (Tutorien ab Dienstag) Bestimme

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]-\infty,0[\cap A}} h(x), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,1[}} h(x) \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in A}} h(x) \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in A}} g(x)$$

Lösung

1. Wegen $-1 \leq \cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ kann jeder Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x_*) = x_*$ nur in $[-1,1]$ liegen. Da $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(0) = 1$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und cos mon. fallend in $[0, \frac{\pi}{2}]$, ist $\cos(x) \geq 0$ für $x \in [-1,1]$, also liegt jeder Fixpunkt x_* von $\cos x = x$ sogar in $[0,1]$.

   $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, also ist $([0,1], d)$ mit $d : [0,1] \times [0,1] \to [0, \infty[, (x,y) \mapsto |x-y|$ ein vollständiger metrischer Raum, und wegen $\frac{\pi}{2} > 1$ ist $\cos(x) \in [0,1]$ für jedes $x \in [0,1]$. Wir können also $T : [0,1] \to [0,1], x \mapsto \cos x$ definieren.
   T ist eine Kontraktion:
   $$|T(x) - T(y)| = |\cos x - \cos y| \overset{\cos'=\sin}{=}{}^{1} |x-y| \, |\sin(\xi)| \leq^{2} |x-y| \underbrace{|\sin(1)|}_{<1}$$
   Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat also $\cos x = x$ genau eine Lösung $x_* \in [0,1]$
   <u>Berechnen:</u> $x_* \simeq 0.739\ldots$ (durch Iteration auf dem Taschenrecher o.ä.)

2. $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ ist gleichmäßig stetig, denn:
   $$\|g(z) - g(w)\|^2 = |\bar{z} - \bar{w}|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = |z-w|^2$$
   $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z = x + iy \mapsto x$ gleichmäßig stetig, denn
   $$|\Re z - \Re w|^2 \leq |z-w|^2 = |\Re z - \Re w|^2 + |\Im z - \Im w|^2$$
   $\Rightarrow$ f ist als Verknüpfung von Mutliplikation, Konjugation, Addition und Realteilbildung stetig: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\bar{z}$ (Multiplikation and Konjugation) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \Re(z^2)$
   $$f(i) = i(-i) + \Re(ii) + 1 = 1 + \Re(-1) + 1 = 1$$
   $$\begin{aligned} |f(z) - f(i)| &= \left|z\bar{z} + \Re(z^2)\right| \\ &= \left|[(z-i)+i]\,[(\bar{z}+i)-i] + \Re\left([(z-i)+i]^2\right)\right| \\ &= \left|(z-i)(\bar{z}+i) - i(z-i) + i(\bar{z}+i) + 1 + \Re\left[(z-i)^2 + 2i(z-i) - 1\right]\right| \\ &\leq |z-i|\,|\bar{z}+i| + |z-i| + |\bar{z}+i| + |z-i|^2 + 2\,|z-i| \\ &= 2\,|z-i|^2 + 4\,|z-i| \end{aligned}$$
   also wähle für $\epsilon \in]0,1[, \delta = \delta(\epsilon, i) := \frac{\epsilon}{6}$ dann: $|z-i| < \delta(\epsilon,i) \Rightarrow |f(z) - f(i)| \leq 2\delta^2 + 4\delta \leq 6\delta = \epsilon$ d.h. f ist stetig in i. (nach $\epsilon - \delta$-Kriterium)

3. b) Beachte: Wegen $d(x,0) = |f(x) - 0| = \frac{|x|}{1+|x|}$ ist für $|x| \leq 1$: $\frac{1}{2}|x| \leq d(x,0) \leq |x|$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[-1,1]$ konvergiert also genau dann bzgl. d gegen 0, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl $|\cdot|$ gegen 0 konvergiert. Somit ist
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in]-\infty,0[\cap A}} h(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in]0,1[}} h(x) = \infty = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A}} g(x)$$
   denn
   $$\begin{aligned} d(h(x_n), -\infty) &= \left|f\left(\frac{1}{x_n}\right) - (-1)\right| = \left|\frac{1}{x_n\left(1 + \frac{1}{|x|_n}\right)} + 1\right| \\ &= \left|\frac{1}{x_n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)} + 1\right| = \left|\frac{1}{x_n - 1} + 1\right| \\ &= \left|\frac{x_n}{x_n - 1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

[1] Mittelwertsatz: Für diffbares $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $|f(b) - f(a)| = |b-a|\,|f'(\xi)|$
[2] $\sin|_{[0,1]}$ monoton steigend

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]-1,0[$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$d(h(x_n),\infty) = \left|f\left(\frac{1}{x_n}\right)-1\right| = \left|\frac{1}{x_n\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}-1\right| = \left|\frac{1-(x_n+1)}{x_n+1}\right|$$
$$= \frac{x_n}{x_n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0,1[$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$d\left(g(x_n),\infty\right) = \left|f\left(\frac{1}{|x_n|}\right)-1\right| = \left|\frac{1}{|x_n|\left(1+\frac{1}{|x_n|}\right)}-1\right| = \left|\frac{1}{(|x|+1)}-1\right|$$
$$= \left|\frac{-|x_n|}{|x_n|+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]-1,0[\cup]0,1[$ mit $x_n \xrightarrow{x\to\infty} 0$ Ebenso ist für $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

$$d(x,1) = |f(x)-f(1)| = \left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-(1+|x|)}{2\left(1+|x|\right)}\right| = \frac{|x-1|}{2(1+x)}$$

also $\frac{1}{5}|x-1| \le d(x,1) \le \frac{1}{3}|x-1|$ und somit konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ bzgl. d genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $|\cdot|$ konvergiert. $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in A}} h(x) = 1$ dann

$$d(h(x_n),1) = \left|f\left(\frac{1}{x_n}\right)-1\right| = \left|\frac{1}{x_n\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}-1\right| = \frac{x_n}{x_n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (o.E.) $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\cap A$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$

a) Nach den Rechenregeln für Quotienten und analog zu den Rechnungen oben ist g, h stetig in $]-\infty,0[\cup]0,\infty[\subseteq\mathbb{R}$. Aus den oben berechneten Limiten folgt: h ist in 0 nicht stetig $\left(\text{da } h(0)\neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in]-\infty,0[\cap A}} h(x)\right)$ und g ist in 0 stetig.
Für $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ $\left(\text{bzgl. d, also } d(x_n,\infty) = \left|\frac{x_n}{1+|x_n|}-1\right| = \left|\frac{-1}{1+x_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$ ist

$$d(g(x_n),0) = d(h(x_n),0) = \left|f\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_n\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}\right| = \frac{1}{x_n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und analog bei $-\infty$