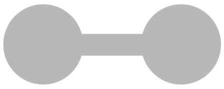
Tutorium 11 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $a_n, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Zeige, dass die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ (mindestens) eine reelle Nullstelle hat.

2. Zeige, dass $K((x,y),r) := \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (x-v)^2 + (y-w)^2 < r^2\right\}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (bzgl. der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$) ist

3. Zeige, dass eine "Hantel"  zusammenhängend ist, aber zwei disjunkte  offene Kreise nicht.

Lösung

1) o.E.: $a_n = 1$ (nach Übergang zu $\frac{f}{a_n}$). Für $R := \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}$ und $|x| > \max\{1, 2nR\}$

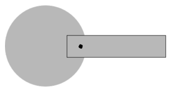
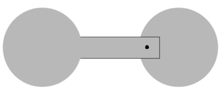
$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right| \\
&\geq |x|^n - \left|a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right| \\
&\geq |x|^n - \Big(|a_{n-1}|\,|x|^{n-1} + \dots + |a_1|\,|x| + |a_0|\Big) \\
&\geq |x|^n - nR\,|x|^{n-1} = |x|^{n-1}(|x| - nR) \\
&\geq \frac{1}{2}|x|^n
\end{aligned}$$

also $f(x) \geq \frac{1}{2}x^n \xrightarrow{x\to\infty} \infty \quad f(x) \leq \frac{1}{2}x^n \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$. Deshalb gibt es $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $f([a,b])$ ein Intervall mit $f(a),\ f(b) \in f([a,b])$, also gibt es eine Nullstelle $\xi \in]a,b[$ von f.

2) Nach Lemma 12.3.10 ist jedes "offene Rechteck" $]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[$ (mit $a_1 < b_1, a_2 < b_2$) als Produkt der zusammenhängenden Mengen $]a_1,b_1[$ und $]a_2,b_2[$ wieder zusammenhängend.

$$\begin{aligned}
K((x,y),r) &= \left\{(v,w) \in \mathbb{R}^2 : (x-v)^2 + (y-w)^2 < r^2\right\} \\
&= \bigcup_{\substack{(x-a_1)^2+(y-b_2)^2=r^2 \\ a_1<x<b_1 \\ a_2<y<b_2 \\ (x-b_1)^2+(y-a_2)^2=r^2}}]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[
\end{aligned}$$

ist zusammenhängend, da $(x,y) \in]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[$ für jedes solche Rechteck.

3) Bei der "Hantel" betrachte zuerst einen Kreis und den Stiel:  Es gibt mindestens einen Punkt im Durchschnitt, also ist diese Menge zusammenhängend. Analog ist in  wiederum mindestens einen Punkt im Durchschnitt. Bei zwei disjunkten Kreisen $K(z_1,r_1)$ und $K(z_2,r_2)$ gilt: $|z_1 - z_2| > r_1 + r_2$ also $\delta := |z_1 - z_2| - r_1 - r_2 > 0$. Daher sind nach Dreiecksungleichung $K(z_1, r_1 + \frac{\delta}{3})$ und $K(z_2, r_2 + \frac{\delta}{3})$ disjunkt (denn wenn es ein $\omega \in K(z_1, r_1 + \frac{\delta}{3}) \cap K(z_2, r_2 + \frac{\delta}{3})$ gibt, dann ist

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - \omega| + |\omega - z_2| < r_1 + \frac{\delta}{3} + r_2 + \frac{\delta}{3} = r_1 + r_2 + \frac{2\delta}{3}$$

Widerspruch zu $|z_1 - z_2| = \delta + r_1 + r_2$ und $\delta > 0$) $K(z_1, r_1 + \frac{\delta}{3})$ und $K(z_2, r_2 + \frac{\delta}{3})$ offen in $\mathbb{C} \Rightarrow K(z_1, r_1 + \frac{\delta}{3}) \mathbin{\dot\cup} K(z_2, r_2 + \frac{\delta}{3})$ ist Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Mengen, also keine zusammenhängende Menge.