Tutorium 12 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$ und A kompakt. Zeige $\operatorname{dist}(A, B) := \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$

2. Auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ betrachte die Topologie $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}} = \Big\{O \subseteq \overline{\mathbb{R}} :$ Für jedes $x \in O$ gibt es
   a) falls $x \in \mathbb{R}$ ist: ein $r = r(x) > 0$ mit $]x - r, x + r[\subseteq O$
   b) falls $x = \pm\infty$ ist: ein $r > 0$ mit $\Big\{y \in \mathbb{R} : y \underset{<}{\overset{>}{}} \underset{-}{\overset{+}{}} \frac{1}{r}\Big\} \subseteq O$

   $\Big\}$ Zeige: $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}})$ ist ein kompakter topologischer Raum.

3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei mit der Standard topologie versehen. Zeige, dass: $f : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}, z \mapsto \frac{1}{z}$ stetig ist.

Lösung

1) Da $B = \overline{B}$ abgeschlossen ist und $A \cap B = \emptyset$, gilt $\operatorname{dist}(a, B) > 0$ für jedes $a \in A$ nach Satz 12.2.15. Angenommen $\operatorname{dist}(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = \inf \{\operatorname{dist}(a, B) : a \in A\} = 0$, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\operatorname{dist}(a_n, B) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da A kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a \in A$. Da $\operatorname{dist}(\cdot, B)$ (gleichmäßig) stetig ist, gilt

$$0 \xleftarrow{k\to\infty} \operatorname{dist}(a_{n_k}, B) \xrightarrow{k\to\infty} \operatorname{dist}(a, B) \text{ (nach Konstruktion von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)},$$

d.h. $\operatorname{dist}(a, B) = 0$ oder $a \in \overline{B} = B$. Widerspruch zu $a \in A$ und $A \cap B = \emptyset$.

2)
- $\emptyset \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ (denn da es kein $x \in \emptyset$ gibt, sind alle weiteren Forderungen für $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ erfüllt)
- $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ (man kann etwa $r = 1$ für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ in der Definition wählen)
- Sind $U_i \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$, $i \in I$ und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, dann gibt es
  a) falls $x \in \mathbb{R}$ ist ein $j \in I$ und $r_j(x) > 0$ mit $]x - r_j(x), x + r_j(x)[\subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$
  b) falls $x = \pm\infty$ ist ein $j \in I$ und $r_j(x) > 0$ mit $\Big\{y \in \mathbb{R} : y \underset{<}{\overset{>}{}} \underset{-}{\overset{+}{}} \frac{1}{r_j(x)}\Big\} \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. insgesamt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$
- Ist J eine endliche Menge, $U_j \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und $x \in \bigcap_{j\in J} U_j$, dann gibt es
  i) falls $x \in \mathbb{R}$ ist, für jedes $j \in J$ ein $r_j(x) > 0$ mit $]x - r_j(x), x + r_j(x)[\subseteq U_j$. Wähle $r(x) := \min \{r_j(x) : j \in J\}$, dann ist $r(x) > 0$, da J endlich also $]x-r(x), x+r(x)[\subseteq \bigcap_{j\in J} U_j$
  ii) falls $x = \pm\infty$ ist, für jedes $j \in J$ ein $r_j(x) > 0$ mit $\Big\{y \in \mathbb{R} : y \underset{<}{\overset{>}{}} \underset{-}{\overset{+}{}} \frac{1}{r_j(x)}\Big\} \subseteq U_j$, also gilt für $r(x) := \max\{r_j(x) : j \in J\} \in]0, \infty[$ wieder $\Big\{y \in \mathbb{R} : y \underset{<}{\overset{>}{}} \underset{-}{\overset{+}{}} \frac{1}{r(x)}\Big\} \subseteq \bigcap_{j\in J} U_j$, d.h. $\bigcap_{j\in J} U_j \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$ (Fälle i) und ii))
- Kompaktheit: Es sei $U_i \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}}$, $i \in I$ eine Familie von offenen Mengen mit $\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{i\in I} U_i$ Wähle $i_+, i_- \in I$ mit $\infty \in U_{i_+}, -\infty \in U_{i_-}$ dann gibt es $r_+, r_- > 0$ mit $\Big\{y \in \mathbb{R} : y > \frac{1}{r_+}\Big\} \subseteq U_{i_+}$ $\Big\{y \in \mathbb{R} : y < -\frac{1}{r_-}\Big\} \subseteq U_{i_-}$, $U_i \cap \mathbb{R}, i \in I \setminus \{i_+, i_-\}$ bilden eine offene Überdeckung von $[-\frac{1}{r_-}, \frac{1}{r_+}]$. Da $[-\frac{1}{r_-}, \frac{1}{r_+}]$ als abgeschlossen und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ in der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ kompakt ist und nach Definition $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}} \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ folgt, gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I \setminus \{i_+, i_-\}$ mit $[-\frac{1}{r_-}, \frac{1}{r_+}] \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$, also ist $\overline{\mathbb{R}} = \Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) \cup U_{i_+} \cup U_{i_-}$ und damit $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{R}}})$ kompakt.

3) Sind $z, w \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so ist $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right| = \frac{w-z}{zw}$. Fixiert man $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, dann ist für alle $w \in \mathbb{K}$ mit $|z - w| < \frac{|z|}{2}$ auch $|w| = |z - (z - w)| \geq ||z| - |z - w|| > \frac{|z|}{2}$. Wählt man also zu gegebenem $\epsilon > 0$ $\delta(\epsilon, z) := \min \Big\{\frac{|z|}{2}, \frac{\epsilon}{3} |z|^2\Big\} > 0$, dann gilt für alle $w \in \mathbb{K}$ mit $|z - w| < \delta(\epsilon, z)$

$$|f(z) - f(w)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right| = \frac{|w - z|}{zw} \leq \frac{2\delta(\epsilon, z)}{|z|^2} \leq \frac{2\epsilon |z|^2}{3 |z|^2} < \epsilon$$

d.h. f ist stetig in $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.