Tutorium 13 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1) Bestimme
   a) $\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \frac{e^{iz}-1}{z}$
   b) $\lim_{x\to 0, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2 \sin\frac{1}{x}$
   c) $\lim_{z‘\to i, z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}} \frac{z-i}{z^2+1}$

2) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ streng monoton steigend, dann ist die Umkehrfunktion von $\tilde{f}:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ stetig.

3) E sei $A=\{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}\cup\{1\}$. Zeige, dass A kompakt ist.

Lösung

1) a) $e^{iz}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(iz)^l}{l!}$ daher für $z\neq 0$: $\frac{e^{iz}-1}{z}=\frac{\sum_{l=1}^{\infty}(\frac{(iz)^l}{l!}}{z}=i\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(iz)^{l-1}}{l!}$ ist eine konvergente Potenzreihe auf $\mathbb{C}$ (denn $\limsup_{l\to\infty}\sqrt{\frac{1}{(1+l)!}}=0$) $\Rightarrow f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto i\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(iz)^{l-1}}{l!}$ stetig, also existiert $\lim_{z\to 0,z\neq 0} f(z)$, also $\lim_{z\to 0,z\neq 0}\frac{e^{iz}-1}{z}=\lim_{z\to 0,z\neq 0} f(z)=f(0)=i$
   b) $\lim_{x\to 0, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2\sin\frac{1}{x}=0$, denn da $|\sin y|\leq 1$ für jedes $y\in\mathbb{R}$, gilt $\left|x_n^2\sin\frac{1}{x_n}\right|\leq\left|x_n^2\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$, d.h. $x_n^2\sin\frac{1}{x_n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$.
   c) $\lim_{z\to i, z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i, z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i, z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}}\frac{1}{z+i}=$[1] $\frac{1}{2i}$

2) $A=\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{1\}$ ist kompakt: Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A, dann gibt es $j_0\in I$ mit $1\in U_{j_0}$ und ein $\epsilon>0$ mit $]1-\epsilon,1+\epsilon[\subseteq U_{j_0}$. Da $1-\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$ gibt es $N=N(\epsilon)$ mit $1-\frac{1}{n}\in]1-\epsilon,1+\epsilon[$ für alle $n\geq N(\epsilon)$. Wähle für jedes $l=1,\dots,N$ ein $j_l\in I$ mit $1-\frac{1}{l}\in U_{j_l}$, dann gilt auch $A\subseteq U_{j_0}\cup U_{j_1}\cup\cdots\cup U_{j_N}$, d.h. $(U_{j_l})_{l=0}$ ist eine endliche Überdeckung von A durch offene Mengen.

3) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ streng monoton steigend, so ist f injektiv, also $\tilde{f}:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ bijektiv, daher existiert die Umkehrabbildung. $(\tilde{f})^{-1}:f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$. Für jedes $a\in\mathbb{R}$ ist

$$\left[\left(\tilde{f}\right)^{-1}\right]^{-1}(]a,\infty[)=f\left(]a,\infty[\right)\overset{[2]}{=}]f(a),\infty[\cap f(\mathbb{R})$$

analog

$$\left[\left(\tilde{f}\right)^{-1}\right]^{-1}(]-\infty,a[)=f\left(]-\infty,a[\right)=]-\infty,f(a)[\cap f(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \left[\left(\tilde{f}\right)^{-1}\right]^{-1}(]a,b[)=\underbrace{]f(a),f(b)[\cap f(\mathbb{R})}_{\text{offen in } f(\mathbb{R})}$. Da jede offene Menge $U\subseteq\mathbb{R}$ eine (abzählbare) Vereinigung von offenen Intervallen $]a_n,b_n[$ ($a_n<b_n$, evtl. $a_1=-\infty$ oder $b_2=\infty$) ist, folgt:

$$\left[\left(\tilde{f}\right)^{-1}\right]^{-1}(U)=(\tilde{f}^{-1})^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n,b_n[\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\tilde{f}^{-1}\right)^{-1}(]a_n,b_n[)=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]f(a_n),f(b_n)[\right)\cap f(\mathbb{R})$$

offen

[1] $\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}, z\mapsto\frac{1}{z}$ stetig
[2] da f streng monoton steigend ist, so ist $f(x)>f(a)$ für alle $x>a$