1 Angabe

Bestimme von folgenden Matrizen eine Jordan-Normalform und die zugehörigen Transformationsmatrizen bzw. Basen von $\mathbb{R}^3$ aus Eigen-/Hauptvektoren.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$v_k \in \mathcal{H}(A, \lambda) \setminus \mathrm{Eig}(A, \lambda, r-1)$ $v_{k-1} = (A - \lambda \mathbb{1}_n) v_k$

Matrix. A

$$\begin{aligned} P_a = \det(A - XE_3) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -2 & 3 & -X \end{pmatrix} \\ &= -X(1+X)(2+X) + 3 - 2(2+X) + X \\ &= -X(1+X)(2+X) - (X+1) \\ &= (X+1)(-2X - X^2 - 1) \\ &= -(X+1)^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow -1$ *ist Eigenwert von* A *mit algebraischer Vielfachheit 3*

$$A + \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \leftrightarrow I]{III \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - II]{II + 2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, -1) = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (A + \mathbb{1}_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[III + I]{II - I} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Eig}(A, -1, 2) = \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A + \mathbb{1}_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{H}(-1) = \mathbb{R}^3$$

Zur Bestimmung einer Jordan-Normalform wähle $v_3 \in \mathcal{H}(-1) \setminus \mathrm{Eig}(A, -1, 2)$,

also z. B. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\textit{denn } \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \textit{ also sind } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \textit{in } \mathbb{R}^3 \textit{ linear unabhängig also insbesondere } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$\Rightarrow v_2 := (A + \mathbb{1}_3) v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(A, -1, 2) \setminus \operatorname{Eig}(A, -1, 1)$$

$$v_1 := (A + \mathbb{1}_3) v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(A, -1) \setminus \{\vec{0}\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \textit{ ist Basis von } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrizen bekommt man aus:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}(F_A) \left(\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \right)^{-1} = \left[\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \right]^{-1} \cdot A \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

Mit $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) =$ [1] $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *bekommen wir*

$$\left[\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textit{d.h.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{JordanNFvonA} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textit{oder: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

[1] Definition: Schreibe den Basisvektor v_1 in der Standardbasis $\mathcal{K}$ und fülle die Koeffizienten in die 1. Spalte

$$
\begin{aligned}
\det(B - X\mathbb{1}_3) &= \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & -1 \\ -2 & 2 & 4-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)^2(4-X) + 2 + 2 + 2(1-X) + 2(1-X) - 4(1-X) \\
&= (1-X)^2(4-X) + 4 - 3X \\
&= (1 - 2X + X^2) + 4 - 3X \\
&= 8 - 12X + 6X^2 - X^3 \\
&= (2-X)^3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 2$ *ist Eigenwert von* B *mit geometrischer Vielfachheit 3*

$$
\begin{aligned}
B - 2\mathbb{1}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[II+I]{III-2I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \mathrm{Eig}(B,2) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
(B - 2\mathbb{1}_3)^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathrm{Eig}(B,2,2) = \mathcal{H}(2)
\end{aligned}
$$

z.B. ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ *also*

$$
\begin{aligned}
v_2 :=& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(B,2,2) \setminus \mathrm{Eig}(B,2) \\
\Rightarrow v_1 :=& (B - 2\mathbb{1}_3)v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(B,2) \\
\Rightarrow \;& \textit{Für } V_1 := \mathrm{lin}\{v_1, v_2\} \textit{ ist } F_B(V_1) \subseteq V_1 \\
& \textit{und für } \mathcal{B} := \{v_1, v_2\} \textit{ ist } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_B|_{V_1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aus der Inklusion : $\left\{\vec{0}\right\} \subsetneq \mathrm{Eig}(B,2) \subsetneq \mathrm{Eig}(B,2,2) = \mathbb{R}^3$ *sieht man, dass jeder Hauptvektor maximaler Stufe, der nicht in* V_1 *enthalten ist in* $\mathrm{Eig}(B,2)$ *liegt. Wir* *wählen also* $\vec{0} \neq w_1 \notin V_1$ *also z.B.* $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\textit{denn } \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \right)$

dann ist $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *Basis von* $\mathbb{R}^3$ *und* $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Wie eben bekommt man $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$