Repetitorium 5 zu Mathematik II für Physiker

Lemma 1. *Ist s eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum und q die zu s gehörige quadratische Form, dann gilt*

a) Für alle $v, w \in V$ gilt die **Parallelogrammidentität:**

$$q(v+w) + q(v-w) = 2(q(v) + q(w)) \tag{1}$$

b) Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so gilt für alle $v, w \in V$ die **Polarisierungsidentität:**

$$s(v,w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w) + iq(v-iw) - iq(v+iw)) \tag{2}$$

c) Ist s eine hermitesche Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so gilt für alle $v, w \in V$ die Polarisierungsidentität:

$$s(v,w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)). \tag{3}$$

Proof.

a) Wegen Sesquilinearität von s folgt:

$$\begin{aligned} q(v+w) + q(v-w) &= s(v+w, v+w) + s(v-w, v-w) \\ &= s(v,v) + s(v,w) + s(w,v) + s(w,w) + s(v,v) \\ &\quad -s(v,w) - s(w,v) + s(w,w) = 2q(v) + 2q(w). \end{aligned}$$

b) Durch Einsetzen der Definitionen und Ausnutzen der Sesqulinearität von s folgt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &q(v+w) - q(v-w) + iq(v-iw) - iq(v+iw) \\ &= s(v,v) + s(v,w) + s(w,v) + s(w,w) - (s(v,v) - s(v,w) - s(w,v) + s(w,w)) \\ &\quad +i(s(v,v) - is(v,w) + is(w,v) + s(w,w)) - i(s(v,v) + is(v,w) - is(w,v) \\ &\quad +s(w,w)) \\ &= 4s(v,w) \end{aligned}$$

c) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt $q(v+w) - q(v-w) = 2s(v,w) + 2s(w,v) = 4s(v,w)$ für hermitesche Sesquilinearformen. $\square$

Und dann noch orthonormalisieren, wie bei Stoppel, Griese, Aufgaben zu S. 4, Nr 8 und 9:

8. Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$:

$$\mathrm{Lin}\,\cancel{\mathrm{span}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

9. Gegeben sei auf $V = \mathrm{Lin}\,\cancel{\mathrm{span}}\,(1, t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}[t]$ das Skalarprodukt

$$s(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt\,.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

8. Wir berechnen wie im Text beschrieben zunächst orthogonale Vektoren und normieren diese anschließend.

Der erste Vektor $w_1 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ dient als Startpunkt und ist bereits normiert. Den im Beweis des Orthonormalisierungssatzes mit v bezeichneten Vektor bezeichnen wir im i-ten Schritt mit v_i, entsprechend die normierten Vektoren mit $\tilde{v}_i$. Dann ist $v_2 = {}^t(1, 0, 1, 0, 0)$ und $\tilde{v}_2 = \langle v_2, w_1\rangle \cdot w_1 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$. Daraus folgt

$$w_2 = v_2 - \tilde{v}_2 = {}^t(0, 0, 1, 0, 0)\,.$$

Auch dieser Vektor ist bereits normiert.

Für den nächsten Schritt gilt $v_3 = {}^t(1, 1, 1, 0, 2)$, damit ergibt sich

$$\tilde{v}_3 = \langle v_3, w_1\rangle w_1 + \langle v_3, w_2\rangle w_2 = {}^t(1, 0, 1, 0, 0)\,.$$

Der Vektor $\tilde{w}_3 := v_3 - \tilde{v}_3 = {}^t(0, 1, 0, 0, 2)$ muss nun normiert werden:

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \cdot \tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot {}^t(0, 1, 0, 0, 2)\,.$$

Wir fahren wie bisher fort und erhalten

$$\tilde{v}_4 = \langle v_4, w_1\rangle \cdot w_1 + \langle v_4, w_2\rangle \cdot w_2 + \langle v_4, w_3\rangle \cdot w_3 = {}^t(2, \tfrac{7}{5}, 0, 0, \tfrac{14}{5})\,.$$

Damit erhalten wir den Vektor $\tilde{w}_4 = v_4 - \tilde{v}_4 = {}^t(0, -\frac{2}{5}, 0, 2, \frac{1}{5})$, der wiederum nicht normiert ist. Das ist jedoch schnell erledigt:

$$w_4 = \frac{1}{\|\tilde{w}_4\|} \cdot \tilde{w}_4 = \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot {}^t(0, -2, 0, 10, 1)\,.$$

Die Vektoren (w_1, w_2, w_3, w_4) bilden nun eine Orthonormalbasis des in der Aufgabe gegebenen Untervektorraumes.

Eine Bemerkung zum Schluss: In den meisten Fällen ist es sinnvoll, die Normierung der Vektoren erst ganz am Ende vorzunehmen, da hierbei im Allgemeinen Zahlen auftreten, mit denen sich nur schwer rechnen lässt. In unserer Aufgabe jedoch waren bereits zwei Vektoren normiert, und mit der Zahl $\sqrt{5}$ kann man eigentlich ganz gut rechnen. Daher bereitete es keine Schwierigkeiten, die Normierung der Vektoren direkt vorzunehmen.

9. a) Die Matrix von s bezüglich der gegebenen Basis ist symmetrisch, da s eine symmetrische Bilinearform ist. Daher müssen nur zehn der sechzehn benötigten Einträge berechnet werden.

Es sei $M_{\mathcal{B}}(s) = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = s(t^i, t^j)$ für $0 \leqslant i, j \leqslant 3$. Damit errechnen wir leicht

$$\begin{aligned}
s(1,1) &= \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2\,, & s(1,t) &= \int_{-1}^{1} t\,dt = 0\,,\\
s(1,t^2) &= \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \tfrac{2}{3}\,, & s(1,t^3) &= \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,,\\
s(t,t) &= \int_{-1}^{1} t^2,dt = \tfrac{2}{3}\,, & s(t,t^2) &= \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,,\\
s(t,t^3) &= \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \tfrac{2}{5}\,, & s(t^2,t^2) &= \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \tfrac{2}{5}\,,\\
s(t^2,t^3) &= \int_{-1}^{1} t^5\,dt = 0\,, & s(t^3,t^3) &= \int_{-1}^{1} t^6\,dt = \tfrac{2}{7}\,.
\end{aligned}$$

Für die Matrix erhalten wir

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

b) Die Vektoren 1 und t sind bereits zueinander orthogonal, jedoch beide (!) nicht normiert. Wegen $\|1\| = \sqrt{2}$ ist $w_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}$ normiert. Analog folgt, dass $w_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}t$ normiert ist. Für den Rest der Aufgabe wählen wir dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 8. Zunächst ist

$$\tilde{v}_3 = \langle t^2, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \langle t^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}t\rangle \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}t = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt + \tfrac{3}{2}t\int_{-1}^{1} t^3\,dt = \tfrac{1}{3}\,,$$

also

$$\tilde{w}_3 = v_3 - \tilde{v}_3 = t^2 - \tfrac{1}{3}\,,$$

und damit

$$w_3 = \frac{1}{\|\tilde{w}_3\|} \cdot \tilde{w}_3 = \sqrt{\tfrac{45}{8}}(t^2 - \tfrac{1}{3})\,.$$

Für den vierten Vektor führt die analoge Rechnung zu

$$\tilde{v}_4 = \tfrac{3}{5}t\,, \quad \tilde{w}_4 = t^3 - \tfrac{3}{5}t\,,$$

und schließlich

$$w_4 = \sqrt{\tfrac{175}{8}}(t^3 - \tfrac{3}{5}t)\,.$$

Damit ist $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ eine Orthonormalbasis von V.