Tutorium 7 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Bestimme zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte, (veraallgemeinerte) Eigenräume, Haupträume und die Jordan Normalform mit den zugehörigen Transformationsmatrizen.

2. Zeige, dass die Sesquilinearform

$$S_A : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}^3} \text{ für } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$ definiert.

Lösung

1. Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A = \det(A - XE_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & 1 \\ -2 & 4-X & -3 \\ -1 & 1 & -X \end{pmatrix} \\ &= (2-X)(4-X)(-X) + 0 - 2 + (4-X) + 3(2-X) + 0 \\ &= -X(2-X)(4-X) - 4X + 8 \\ &= (2-X)(-X(4-X) + 4) \\ &= (2-X)(X^2 - 4X + 4 \\ &= -(X-2)^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 2 ist der einzige Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 3
$\operatorname{Eig}(A,2) = \ker(A - 2\mathbb{1}_3)$:

$$\begin{aligned} A - 2\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Eig}(A,1) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ geometrische Vielfachheit von 2 ist 1 $\operatorname{Eig}(A,2,2) = \ker(A - 2\mathbb{1}_3)^2$:

$$\begin{aligned} (A - 2\mathbb{1}_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Eig}(A,2,2) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\Rightarrow \operatorname{Eig}(A,2,3) = \mathcal{H}(2) = \mathbb{R}^3$ ist der Hauptraum zum Eigenwert 2 (denn $\dim \mathcal{H}(2) = 3$ =algebraische Vielfachheit und $\dim \operatorname{Eig}(A,2,2) = 2$).

Wegen $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} V_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(2) \setminus \mathrm{Eig}(A,2,2) \\ v_2 :=& (A - 2\mathbb{1}_3)v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A,2,2) \setminus \mathrm{Eig}(A,2) \\ v_1 :=& (A - 2\mathbb{1}_3)v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A,2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ In der Basis $\mathcal{B}_A = \{v_1, v_2, v_3\}$ hat $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ die darstellende Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}_A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =: T$$

Wähle nun in Satz 7.3.10 $\Big(F : V \to W$ sei K-linear, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)\left(\mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\right)^{-1}\Big)$

- $V = W = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{K},\ \mathcal{A}' = \mathcal{B}' = \mathcal{B}_A,\ F = F_A$ dann folgt:

$$\begin{aligned} J =& \mathcal{M}_{\mathcal{B}_A}^{\mathcal{B}_A}(F_A) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_A}^{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(F_A)}_{A}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_A}^{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3)\right)^{-1} \\ =& \left[\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}_A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right]^{-1} A\, \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}_A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\ =& T^{-1}AT \end{aligned}$$

Mit $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist auch die zweite Transformationsmatrix bestimmt.

- $V = W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' = \mathcal{K}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}_A$; $F = F_A$

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(F_A) = \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}_A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\mathcal{M}_{\mathcal{B}_A}^{\mathcal{B}_A}(F_A)\left(\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}_A}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right) = TJT^{-1}$$

2. Offenbar ist S_A Sesquilinearform (vgl. Bsp. 11.1.5)
   - $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist selbstadjungiert, daher ist

$$S_A(x,y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}^3} = \langle A^*x, y \rangle_{\mathbb{C}^3} = \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^3} = \overline{\langle y, Ax \rangle}_{\mathbb{C}^3} = S_A(y,x)$$

   d.h. S_a ist hermitesche Sesquilinearform.

- $$\begin{aligned}\det(A - X\mathbb{1}_3) &= \det\begin{pmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 0 & 3-X & 1 \\ 0 & 1 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= (2-X)\left((3-X)^2-1\right) \\ &= (2-X)(X^2-6X+8) \\ &= (2-X)^2(4-X)\end{aligned}$$

  deshalb hat A die Eigenwerte 2 (mit Vielfachheit 2) und 4. Da A selbstadjungiert ist gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{C}^3$ mit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

- Schreibe $x, y \in \mathbb{C}^3$ in der Basis $\mathcal{B}$: $x = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,\ y = w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3$, dann gilt für $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:
  $S_A(x, y) = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{C}^3} = \left\langle u, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)w\right\rangle_{\mathbb{C}^{3\prime}}$, d.h.
  $S_A(x, x,) = \left\langle u, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} u \right\rangle_{\mathbb{C}^3} = 2\left|u_1\right|^2 + 2\left|u_2\right|^2 + 4\left|u_3\right|^2 \geq 0$ und
  $S_A(x, x) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Also ist S_A auch positiv definit.