Tutorium 7 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} := \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ Zeige, dass (X, $\mathcal{T}$) ein topologischer Raum ist.

2. Es sei (X, $\mathcal{T}$) ein hausdorffscher, topologischer Raum, $x \in X$. Zeige, dass $\{x\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

3. a) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ und $\tilde{\mathcal{T}}$ seien Topologien auf X. Unter welchen Bedingungen an $\mathcal{T}$ und $\tilde{\mathcal{T}}$ ist $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \tilde{\mathcal{T}})$ stetig

   b) Es sei X eine Menge, $x \in X$. Bestimme alle stetigen Abbildungen $f : (X, \{\emptyset, X\}) \to (X, \{\emptyset, \{x\}, X\})$

   c) Welche Abbildungen $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ sind für eine beliebige Topologie $\mathcal{T}$ auf X stetig?

   d) Welche Abbildungen $f : (X, \{\emptyset, X\}) \to (X, \mathcal{T})$; sind für eine Topologie $\mathcal{T}$ (in der es zwei einelementige offene Mengen gibt) auf X stetig?

4. Es sei $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 7b). Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ in 0 nicht stetig ist.

Lösung

1. i) $\emptyset \in \mathcal{T}, \emptyset = X \setminus X$ ist endlich, also $X \in \mathcal{T}$

   ii) Sind $U_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, d.h. $X \setminus U_i$ endlich für alle $i \in I$, dann ist $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq X \setminus U_j$ für jedes $j \in I$, also $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ endlich, d.h. $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$

   iii) Ist J eine endliche Menge, $U_j \in \mathcal{T}$ für $j \in J$, dann ist $X \setminus \left(\bigcap_{j\in J} U_j\right) = \bigcup_{j\in J} (X \setminus U_j)$ als Vereinigung von endlich vielen endlichen Mengen wieder eine endliche Menge, d.h. $\bigcap_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}$.

2. Da $(X, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher, topologischer Raum ist, gibt es für $x \in X$ und jedes $y \in X$ mit $x \neq y$ (offene) Umgebungen U_y von x und V_y von y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $U := \bigcap_{\substack{y\in X\\ y\neq x}} V_y$

   a) als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen

   b) $x \notin U$

   c) $X \setminus \{x\} \supseteq U$ also ist $U = X \setminus \{x\}$ offen, d.h. $\{x\}$ ist abgeschlossen.

3. Da eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ für alle $V \in \mathcal{T}_Y$ ist folgt:

   a) Wegen $\mathrm{id}_x{}^{-1}(V) = V$ für alle $V \subseteq X$ ist $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \tilde{\mathcal{T}})$ genau dann stetig, wenn $\mathrm{id}_X^{-1}(V) = V \in \mathcal{T}$ für alle $V \in \tilde{\mathcal{T}}$ erfüllt ist, d.h. wenn $\tilde{\mathcal{T}}$ gröber ist als $\mathcal{T}$ ist $(\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T})$.

   b) Ist $f : X \to X, y \mapsto x$, so ist $f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(X) = X$ also f stetig. Gibt es ein $y \in X$ mit $f(y) \neq x$, so gibt es 2 Fälle:

      i) $x \in f(X) \Rightarrow f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$, $f^{-1}(\{x\}) \neq X$ $\left(\text{da } y \notin f^{-1}(\{x\})\right)$, d.h. f ist nicht stetig

      ii) $x \notin f(X) \Rightarrow f^{-1}(\{x\}) = \emptyset$, $f^{-1}(X) = X$, d.h. f ist stetig

   c) Für jedes $Y \subseteq X$ ist $f^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(X)$, also ist jedes $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ stetig

   d) $\mathcal{T} \neq \{\phi, X\} \Rightarrow f^{-1}(U) = X$ für alle $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$. Sind also jetzt $x, y \in X, x \neq y$ und $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{T}$, dann ist $f^{-1}(\{x\}) \neq f^{-1}(\{y\})$ (sonst kann man keine Funktion definieren), also f nicht stetig.

4. In der Standard topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}$ bildet $\mathcal{U}_0 := \{]-\epsilon, \epsilon[: \epsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von 0, daher ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ genau dann in 0 stetig, wenn für jedes $\epsilon > 0$ auch $f^{-1}\big(\underbrace{]-\epsilon, \epsilon[}_{\in\,\mathcal{U}_0}\big)$ Umgebung von 0 ist. Da aber

$$f^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in]-\epsilon, \epsilon[\} = \begin{cases}]-\infty, 0], & \epsilon \leq 1 \\ \mathbb{R}, & \epsilon > 1 \end{cases}$$

im Fall $\epsilon \leq 1$ keine Umgebung von 0 bildet, ist f in 0 nicht stetig.