Tutorium 9 zur Mathematik für Physiker

Aufgaben

1. Betrache $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$

   a) Zeige, dass $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1], x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{für } x = \infty \\ -1 & \text{für } x = -\infty \end{cases}$ bijektiv ist mit Umkehrabbildung. $g : [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto \begin{cases} \frac{y}{1-|y|} & \text{für } y \in]-1,1[\\ \infty & \text{für } y = 1 \\ -\infty & \text{für } y = -1 \end{cases}$

   b) Zeige, dass $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,\infty[, (x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert

   c) Zeige: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt (bis auf wenige Ausnahmen) $d(x,y) \neq |x-y|$

2. Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume $X := \prod_{k=1}^{n} X_k$ das kartesische Produkt und $pr_k : X \to X_k, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$ die Projektion auf den k. Unterraum.
   Zeige, dass

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to [0,\infty[, \\ ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &\mapsto \sum_{k=1}^{n} (d_k(x_k,y_k)) \text{ und} \\ d_\infty : X \times X &\to [0,\infty[, \\ ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &\mapsto \sup\{d_k(x_k,y_k) : 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

   je eine Metrik auf X definieren.

Lösung

1. a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \left|\frac{x}{1+|x|}\right|} = \frac{x(1+|x|)}{(1+|x|)(1+|x|-|x|)} = x$$

$(g \circ f)(\infty = g(1) = \infty,\ (g \circ f)(-\infty) = g(-1) = -\infty$, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_{\bar{\mathbb{R}}}$ Für $y \in]-1,1[$ ist

$$(f \circ g)(y) = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \left|\frac{y}{1-|y|}\right|} = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{\frac{1-|y|+|y|}{|1-|y||}} = \frac{y\,|1-|y||}{1-|y|} \overset{|y|<1}{=} y$$

$(f \circ g)(1) = f(\infty) = 1, (f \circ g)(-1) = f(-\infty) = -1$ d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_{[-1,1]}$ also ist f bijektiv mit Umkehrabbildung g.

b) $d : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to [0,\infty[, (x,y) \mapsto |f(x) - f(y)|$
$d(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ da f bijektiv

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \\ &= \begin{cases} f(x) - f(z) & \text{für } f(x) \geq f(y),\ f(y) \geq f(z) \\ 2f(y) - f(x) - f(z) & \text{für } f(x) < f(y),\ f(y) \geq f(z) \\ f(x) + f(z) - 2f(y) & \text{für } f(x) \geq f(y),\ f(z) > f(y) \\ f(z) - f(x) & \text{für } f(x) < f(y),\ f(z) > f(y) \end{cases} \\ &\geq |f(x) - f(z)| = d(x,z) \end{aligned}$$

c) Ist $|x-y| > 2$, so ist wegen $f(x), f(y) \in [-1,1]$, $d(x,y) = |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2$, also $d(x,y) \neq |x-y|$ für $|x-y| > 2$ und sonst müßte man untersuchen, für welche $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$:

$x, y \geq 0$: x>y: $y = \frac{-x}{1+x}$ und $x < y$: $y = -1 - \frac{1}{1+x}$

$x, y < 0$: x>y: $y = \frac{-x}{1-x}$ und $x < y$: $y = 1 + \frac{1}{1-x}$

$x \geq 0, y < 0$: $y_{1,2} = \frac{x^2 + \pm x\sqrt{x^2-4-4x}}{2(1+x)}$

$x < 0, y \geq 0$: wahnsinnig hässlich.

also unendlich viele, aber im Vergleich wenige Fälle, wo sie übereinstimmen.

2. $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume $X = \prod_{k=1}^{n} X_k,\ pr_k : X \to X_k, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$

i) $d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) := \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k) \geq 0\ \forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X.$
$d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = 0 \Leftrightarrow d_k(x_k, y_k) = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ (da $d_k(x_k, y_k) \geq 0) \Leftrightarrow x_k = y_k$ (da d_k Metrik auf X_k)

ii) Wegen $d_k(x_k, y_k) = d_k(y_k, x_k)$ ist $d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = d\left((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_n)\right)$

iii) Für $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n) \in X$ ist

$$\begin{aligned} &d\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) + d\left((y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)\right) \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k) + d_k(y_k, z_k) \\ &\qquad \geq^{1} \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, z_k) = d\left((x_1, \ldots, x_n), (z_1, \ldots, z_n)\right) \end{aligned}$$

[1] $\triangle$-Ungleichung in (X_k, d_k)

i)

$$d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = \sup\left\{d_k(x_k,y_k) : 1 \le k \le n\right\}$$
$$= \begin{cases} \ge 0 & (\text{da } d_k(x_k,y_k) \ge 0) \\ = 0 & \Leftrightarrow d_k(x_k,y_k) = 0 \text{ für alle } k = 1,\dots,n \\ & \overset{d_k \text{ Metrik}}{\Leftrightarrow} \quad x_k = y_k \\ & \Leftrightarrow (x_1,\dots x_n) = (y_1,\dots,y_n) \end{cases}$$

ii) $d_k(x_k,y_k) = d_k(y_k,x_k) \Rightarrow d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) = d_\infty\left((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)\right)$

iii) Sei $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n) \in X$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(z_1,\dots,z_n)\right) &= \sup\{\underbrace{d_k(x_k,z_k)}_{d_k(x_k,y_k)+d_k(y_k,z_k)} : 1 \le k \le n\} \\ &\le \sup\{d_k(x_k,y_k) + d_k(y_k,z_k) : 1 \le k \le n\} \\ &\le \sup\{d_k(x_k,y_k) : 1 \le k \le n\} + \sup\{d_k(y_k,z_k) : 1 \le k \le n\} \\ &= d_\infty\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) + d_\infty\left((y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n)\right) \end{aligned}$$