1. Spektraltheorie beschränkter Operatoren

Generalvoraussetzung: $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$

Spektraltheorie von Operatoren

= Verallg. der Diagonalisierung von Matrizen auf lin. Abb. in ∞-dim. Raum

1.1. Rückblick: Der endlich-dimensionale Fall

Sei $A = (a_{jk})_{1 \le j,k \le n}$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$ mit $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$

eine selbstadj. $n\times n$-Matrix über $\mathbb{C}$.

Lin. Alg. $\Rightarrow$ $\exists$ unitäre $n\times n$-Matrix U:

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, U^*$$

Diagonalmatrix mit Einträgen

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ reelle Eigenwerte von A (gezählt mit Vielfachheit)
- $U = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

  $\varphi_\nu \in \mathbb{C}^n$, $\neq 0$ Eigenvektor zu λ_ν: $\boxed{A\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu}$ für $\nu = 1, \dots, n$

  - o.E. $\|\varphi_\nu\| = 1$
    (Euklid. Norm auf $\mathbb{C}^n$)
  - $\langle \varphi_\nu, \varphi_{\nu'} \rangle = \delta_{\nu\nu'}$ orthogonal
    (Euklid. Skalarprodukt)

also $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1,\dots,n}$ ONB von $\mathbb{C}^n$.

Spektraldarstellung von A:

$$P_\nu := \varphi_\nu \otimes \varphi_\nu := \left(\varphi_{\nu,j}\,\overline{\varphi_{\nu,k}}\right)_{1\le j,k\le n} = \langle \varphi_\nu, \cdot \rangle \varphi_\nu$$

dyadisches Produkt

(1-dim) Orthogonalprojektor auf φ_ν ($\leftarrow$ s.w.!)

Somit $$\boxed{A = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu P_\nu}$$

$$\text{mit } P_\nu P_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'} P_\nu \qquad (*)$$

(Bew.: $A\varphi_{\nu'} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \underbrace{P_\nu \varphi_{\nu'}}_{\delta_{\nu\nu'}\varphi_{\nu'}} = \lambda_{\nu'} \varphi_{\nu'}$,

also Übereinstimmung auf ONB)

Falls gleiche λ_ν's vorhanden, ist Zusammenfassung der zugeh. P_ν's zu mehrdimens. Projektor möglich.

Etwas umständlich z.B. so:

Borel-σ-algebra auf $\mathbb{R}$

Dirac-Maß bei $\lambda \in \mathbb{R}$: $\delta_\lambda : \begin{array}{l} \mathcal{B} \to \{0,1\} \\ B \mapsto \begin{cases} 1, & \lambda \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$

$\mathcal{P}$: Menge der $n\times n$-Orthogonalprojektoren

projektorwertiges Maß: $\mathbb{P}: \begin{array}{l} \mathcal{B} \to \mathcal{P} \\ B \mapsto \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{\lambda_\nu}(B) P_\nu \end{array}$

$$= \sum_{\substack{\nu=1,\dots,n: \\ \lambda_\nu \in B}} P_\nu$$

($\in \mathcal{P}$ wegen $(*)$!)

Träger des Maßes $\mathbb{P}$:

$\operatorname{spec}(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \lambda \; \mathbb{P}(\{\lambda\})}$

wegen $\int_{\mathbb{R}} d\delta_\xi(\lambda) f(\lambda) = f(\xi)$ auch

$$\boxed{A = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}(\lambda) \, \lambda = \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mathbb{P}(\lambda) \, \lambda}$$

← Spektraldarstellung

Hier: projektorwertiges Maß $\mathbb{P}$ ist (endliche) Summe von Dirac-Anteilen. Dies ist in ∞-dim. Räumen i.a. nicht so.

Funktionalkalkül: für $f : \operatorname{spec}(A) \to \mathbb{C}$ setze

$$\boxed{f(A) := \sum_{\nu=1}^{n} f(\lambda_\nu) \, P_\nu = \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mathbb{P}(\lambda) \, f(\lambda)}$$

für $f_p(\lambda) := \sum_{r=0}^{t} \gamma_r \lambda^r$ ein Polynom vom Grad t,

$\gamma_r \in \mathbb{C} \quad \forall r = 0, \dots, t$

gilt

$$f_p(A) = \sum_{r=0}^{t} \gamma_r A^r \quad \text{mit } A^0 := \mathbb{1}$$

(Bew.: Übereinstimmung auf Eigenbasis)