## 1.2. Stetiger Funktionalkalkül

$\boxed{\text{1.1. Definition}}$ Sei $A \in BL(\mathcal{H})$ beschr., linear $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$

(i) $A$ selbstadjungiert $:\Leftrightarrow \langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ Skalarpr. auf $\mathcal{H}$

d.h. $A = A^*$

(ii) $W(A) := \{ \langle \psi, A\psi \rangle : \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1 \} \subset \mathbb{C}$ (beschränkt!)

numerischer Wertebereich

(iii) $A \geq 0$ positiv (besser: nicht-negativ) $:\Leftrightarrow \langle \psi, A\psi \rangle \geq 0$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$

$\left( \Rightarrow \quad A = A^* \right)$

Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ & Polarisierung

$\boxed{\text{1.2. Lemma}}$ Sei $A \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$. Dann ist

$$\operatorname{spec}(A) \subseteq \overline{\mathcal{W}(A)} \quad (\text{compact in } \mathbb{C})$$

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{\mathcal{W}(A)} \Rightarrow d := \operatorname{dist}(\lambda, \overline{\mathcal{W}(A)}) > 0$

also: $\forall \psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$:

$$d \overset{(*)}{\leq} |\underbrace{\langle \psi, A\psi \rangle - \lambda}_{\langle \psi, (A-\lambda)\psi \rangle}| \overset{\text{CS-Ugl.}}{\leq} \|(A-\lambda)\psi\|$$

$\Rightarrow$ $A - \lambda$ injektiv; Außerdem

(1) $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ abgeschl. in $\mathcal{H}$ (da $(A-\lambda)^{-1}: \operatorname{ran}(A-\lambda) \to \mathcal{H}$ existiert und ist stetig)

(2) $[\operatorname{ran}(A-\lambda)]^{\perp} = \{0\}$, denn für

$$\varphi \in [\operatorname{ran}(A-\lambda)]^{\perp} \Rightarrow \langle \varphi, (A-\lambda)\varphi \rangle = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \varphi = 0$$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \operatorname{ran}(A-\lambda) = \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ $A - \lambda$ bijektiv, d.h. $\lambda \in \varrho(A)$ ∎

$\boxed{\text{1.3. Korollar}}$ Sei $A \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$ selbstadj. Dann ist

$$\operatorname{spec}(A) \subseteq [m(A), M(A)] \subset \mathbb{R}$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ m \end{Bmatrix}(a) = \begin{Bmatrix} \sup \\ \inf \end{Bmatrix} \{ \langle \psi, A\psi \rangle : \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1 \}$$

Insbesondere für $A \geq 0$ gilt $\operatorname{spec}(A) \subseteq [0, \infty[$.

**1.4. Satz** (Stetiges Funktionalkalkül)

Sei $A \in BL(\mathcal{H})$, $A = A^*$. Dann $\exists_1\ \Phi : C(\mathrm{spec}(A)) \to BL(\mathcal{H})$ mit

(a) $\underset{\lambda \mapsto \lambda}{\Phi(id)} = A$, $\underset{\lambda \mapsto 1}{\Phi(1)} = \mathbb{1}$ (s.u.)

(b) $\Phi$ ist ein *-Algebren-Homomorphismus, d.h.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall f, g \in C(\mathrm{spec}(A)) :$$

$$- \ \Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g) \quad (\text{linear})$$

$$- \ \Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$$

$$- \ \Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$$

(c) $\Phi$ stetig

Notation: $f(A) := \Phi(f)$ für $f \in C(\mathrm{spec}(A))$

(später: Erweiterung auf messbare $f$)

Beweis. Strategie: (i) zeige $\exists_1\ \Phi_0$ mit obigen Eigenschaften auf $\mathrm{Poly}[\mathrm{spec}(A)]$.

(ii) Da $\mathrm{Poly}[\mathrm{spec}(A)]$ dicht in $C(\mathrm{spec}(A))$ nach Stone-Weierstraß (Kor. I.1.51) $\overset{\text{Satz I.2.30 (BL(}\mathcal{H}\text{) ist vollst.!)}}{\Longrightarrow}$ $\exists_1$ stetige Fortsetzung $\Phi$ von $\Phi_0$ auf $C(\mathrm{spec}(A))$

zu (i): für $p: \begin{array}{l}\mathrm{spec}(A) \to \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto \sum_{r=0}^{n} \gamma_r \lambda^r\end{array}$, $\gamma_r \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

setze $\Phi_0(p) := \sum_{r=0}^{n} \gamma_r (\Phi_0(id))^r$, mit $\Phi_0(id) := A$, $A^0 := \mathbb{1}$

- einzige Möglichkeit, um (a) u. (b) zu erfüllen
- wohldefiniert: für $p_1, p_2 \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]$, $p_1 \neq p_2$

  also $p_1|_{\mathrm{spec}(A)} = p_2|_{\mathrm{spec}(A)}$ gilt $\Phi_0(p_1) = \Phi_0(p_2)$, da

$\boxed{\text{1.5. Lemma}}$ $\forall\, p \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]$ gilt:

$$\|\Phi_0(p)\| = \sup_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} |p(\lambda)|$$

Beweis beruht auf

$\boxed{\text{1.6. Lemma}}$ $\forall\, p \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]$ gilt:

$$\mathrm{spec}(\underbrace{p(A)}_{\cong \Phi_0(p)}) = p(\mathrm{spec}(A)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \mathrm{spec}(A)\}$$

Beweis. "$\supseteq$" sei $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$. $t = \lambda$ ist Nullstelle von

$$p(t) - p(\lambda) \Rightarrow p(t) - p(\lambda) = (t-\lambda)\, \underbrace{q(t)}_{\in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]}$$

$$\Rightarrow p(A) - p(\lambda) = (A - \lambda)\, q(A)$$

Ann.: $p(\lambda) = \rho(p(A))$ $\Rightarrow$ $\mathbb{1} = (A-\lambda)\, q(A)\, [p(A) - p(\lambda)]^{-1}$

$\rho$ ← Resolv.menge

$$= q(A)\, [p(A) - p(\lambda)]^{-1}\, (A - \lambda)$$

Operatoren in ran$(\Phi_0)$ kommutieren!

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ ↯, also $p(\lambda) \in \mathrm{spec}(p(A))$

"$\subseteq$" sei $\lambda \in \mathrm{spec}(p(A))$, seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle Nullstellen von

$$p(t) - \lambda = \gamma\,(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow p(A) - \lambda = \gamma\,(A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_n)$$

Falls $\lambda_j \in \varrho(A) \;\; \forall\, j = 1, \dots, n \;\; \Rightarrow \;\; \lambda \in \varrho(p(A))$ ↯

Also $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j \in \operatorname{spec}(A)$

aber $p(\lambda_j) = \lambda \;\; \Rightarrow \;\; \lambda \in p(\operatorname{spec}(A))$ ∎

Beweis von Lemma 1.5

$$\|\Phi_0(p)\|^2 \underset{\text{Satz I.5.13(e)}}{=} \|\underbrace{\Phi_0(p)^* \Phi_0(p)}_{\text{selbstadj.}}\| \overset{\text{Satz I.5.26(b) (Spektralradius)}}{=} \sup_{\mu \in \operatorname{spec}(\underbrace{\Phi_0(p)^* \Phi_0(p)}_{\Phi_0(\bar p p)\ (b)})} |\mu|$$

$$\overset{\text{Lemma 1.6}}{=} \sup_{\mu \in (\bar p p)(\operatorname{spec}(A))} |\mu|$$

$$= \sup_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \underbrace{|(\bar p p)(\lambda)|}_{|p(\lambda)|^2} = \Big( \sup_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} |p(\lambda)| \Big)^2$$

∎

Beweis von Satz 1.4 (Forts.)

Bislang $\Phi_0 : \operatorname{Poly}(\operatorname{spec}(A)) \to BL(\mathcal{H})$ wohldef. und erfüllt (a), (b)

Lemma 1.5 $\Rightarrow$ (c) erfüllt (sogar Isometrie!)

Noch zu zeigen: stetige Fortsetzung $\bar\Phi$ (aus (ii)) erbt Eigenschaften (b) von $\Phi_0$ (Übung!)

∎

**1.7. Definition**

(i) $\mathcal{A} \subseteq BL(\mathcal{H})$ ist eine Banach-Algebra (von Operatoren)

$$:\Leftrightarrow \quad \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{A}$$

(ii) $\mathcal{A}$ ist C*-Algebra $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ ist Banach-Algebra und es gilt:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$$

Nützliche Eigenschaften des Funktionalkalküls (Zus.fassung)

**1.8. Satz** Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$, $f \in C(\mathrm{spec}(A))$. Dann gilt

( ) (a) $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$

(b) $f \geq 0 \Rightarrow f(A) \geq 0$

(c) $A\psi = \lambda\psi$ (Eigenwert $\lambda$ zum EV $\psi \in \mathcal{H}$)

$$\Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi$$

(d) $\mathrm{spec}(f(A)) = f(\mathrm{spec}(A))$

(e) $\mathcal{A} := \{f(A) : f \in C(\mathrm{spec}(A))\}$ ist eine kommutative (= abelsche)

( ) C*-Algebra normaler Operatoren mit

$f(A)$ selbstadj. $\Leftrightarrow$ $f$ reell

Beweis. (a): Lemma 1.5 + $\Phi$ stetig

(b) $f \geq 0 \Rightarrow \exists\ 0 \leq g \in C(\mathrm{spec}(A))$ mit $f = g^2$,

$$\Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{H}: \langle \psi, \underbrace{f(A)}_{\underbrace{g(A)}_{g(A)^*}g(A)}\psi \rangle = \|g(A)\psi\|^2 \geq 0$$

(c) klar für $f$ Polynom, für bel. stetiges $f$ durch Approx. von Polynomen (Übung!)

(d) "$\subseteq$" Sei $\mu \notin f(\mathrm{spec}(A)) \Rightarrow g := \frac{1}{f-\mu} \in C(\mathrm{spec}(A))$

und $g(f-\mu) = (f-\mu)g = 1$

$\Rightarrow g(A) \in \mathcal{BL}(\mathcal{H}) \wedge g(A) = (f(A)-\mu)^{-1}$

$\Rightarrow \mu \in \varrho(f(A))$ ✓

"$\supseteq$" Sei $\mu = f(\lambda)$ für ein $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in \mathrm{Poly}[\mathrm{spec}(A)]$ mit $\|f - g_n\|_\infty \leq 1/n$

$$\overset{\text{Lemma 1.7}}{\Rightarrow} g_n(\lambda) \in \mathrm{spec}(g_n(A))$$

$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \exists \underbrace{\psi_n \in \mathcal{H}}_{\|\psi_n\|=1} : \|(g_n(A) - g_n(\lambda))\psi_n\| \leq 1/n$$

("Weyl-Folge")

$$\Rightarrow \|[f(A)-\mu]\psi_n\| \leq \underbrace{\|[f(A) - g_n(A)]\psi_n\|}_{\leq \|\psi_n\| \cdot 1/n} \; (a) + \underbrace{\|[g_n(A) - g_n(\lambda)]\psi_n\|}_{\leq 1/n} + \underbrace{|g_n(\lambda)-\mu|}_{\leq 1/n} \|\psi_n\| \leq 3/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \mu \in \mathrm{spec}(f(A))$$ ✓

(e) $\mathcal{A}$ abgeschl. in $\mathcal{BL}(\mathcal{H})$, da $\Phi$ Isometrie $\Rightarrow \Phi^{-1} : \mathrm{ran}(\Phi) \to C(\mathrm{spec}(A))$ ist Isometrie, insbes. stetig; kommutieren klar für Polynome $p(A)$, für $f(A)$ mittels Limesargument; (a) $\wedge$ Satz 1.4 (b) $\Rightarrow$ restl. Eigenschaften

2. Vorl.

**1.9. Beispiele** Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$

(i) $A \geq 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{spec}(A) \subseteq [0,\infty[$

$\Rightarrow$ $A^{1/2} \equiv \Phi(\sqrt{\cdot})$ ist die positive Quadratwurzel

von $A$ : $A^{1/2} \geq 0$ , $A^{1/2} A^{1/2} = A$

(ii) $|A| \equiv \Phi(|\cdot|)$ Betrag von $A$ erfüllt $|A| \geq 0$

und $|A|^2 = A^2$ . Es gilt $|A| = (A^2)^{1/2}$

(iii) $\forall$ $\lambda \in \rho(A)$ : $\|(A-\lambda)^{-1}\| = \dfrac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{spec}(A))}$

wegen 1.8(a)