1.3. Der Satz von Riesz-Markov

Ziel: Identifizierung des Dualraums von $C(K)$, K ein kompakter topolog. Raum, mit dem Raum der komplexen Maße endlicher Variation über K.

1.10. Definition Sei (Ω, Σ) ein Messraum.

$\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ (bzw. $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$) heißt komplexes (bzw. signiertes) Maß, falls für $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

1.11. Bemerkung

(i) $|\mu(A)| < \infty \quad \forall A \in \Sigma$ (endliches Maß)

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$ (aus $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ u. σ-Add.)

1.12. Def. & Satz (α) Sei μ ein komplexes (bzw. signiertes) Maß auf (Ω, Σ). Dann ist

$$|\mu| : \begin{array}{l} \Sigma \to [0, \infty[\\ A \mapsto |\mu|(A) := \sup\limits_{\substack{E_1,\dots,E_n \in \Sigma : \\ n \in \mathbb{N},\ \dot{\bigcup}_{j=1}^n E_j = A}} \sum_{j=1}^n |\mu(E_j)| \end{array}$$

← disjunkte, endliche Zerlegung von A

ein (positives) endliches Maß, das Variationsmaß von μ.

$\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ $(<\infty)$ heißt Variationsnorm von μ. (b.w.)

(b) $\exists\ \phi_\mu : \Omega \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ messbar

($\text{bzw. } \phi_\mu : \Omega \to \{\pm 1\}$ messbar für signiertes Maß),

so dass $$\mu(A) = \int_A d|\mu|(x)\ \phi_\mu(x) .$$

(c) $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma) := \{\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ komplexes Maß$\}$

ist ein Banach-Raum mit der Variationsnorm

(analog für signierte Maße).

$\boxed{\text{1.13. Korollar}}$ (a) $|\mu(A)| \overset{\text{i.a. } \neq}{\leq} |\mu|(A) \leq \|\mu\| \quad \forall A \in \Sigma$

(b) Jordan-Zerlegung (schränke μ auf $\begin{smallmatrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{smallmatrix}\, \phi_\mu \gtrless 0$ ein ...)

$\exists\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ endliche, positive Maße auf Σ mit

$\mu_1 \perp \mu_2$ und $\mu_3 \perp \mu_4$, so dass $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$.

singulär

$$\left(\begin{array}{l} \exists\, S \in \Sigma : \mu_1(\Omega \setminus S) = 0 \\ \text{und } \mu_2(S) = 0 \end{array} \right)$$

Für ein signiertes Maß ist $\mu_3 = \mu_4 = 0$ und $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$.

1.14. Beispiele

(i) Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, δ_{x_j} das bei x_j konzentrierte Dirac-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$:

$$\Rightarrow \quad \mu := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta_{x_j} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \quad \text{mit}$$

$$|\mu| = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \, \delta_{x_j} \quad \text{und} \quad \|\mu\| = \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|$$

(ii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu := \int dx \, f(x) \cdot \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

mit $|\mu| = \int dx \, |f(x)| \cdot$, $\|\mu\| = \|f\|_1$

und $\phi_\mu(x) := \begin{cases} 0 , & f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} , & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis von Satz 1.12.

(a) σ-Additivität und Endlichkeit von $|\mu|$ nicht trivial!
Siehe z.B: Rudin, Real & Complex Analysis, Kap. 6.

(b) folgt aus Radon-Nikodym für komplexe (bzw. signierte) Maße (Rudin ....)

} eher maßtheoretischer Natur

(c) $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ ist Vektorraum vermöge

$$(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(A) := \alpha\mu_1(A) + \beta\mu_2(A) \quad , \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

Dreiecksungl. für $\|\cdot\|$:

$$\|\mu_1+\mu_2\| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disj. Zerlegungen} \\ \{E_j\} \text{ von } \Omega}}{\sup} \sum_j \underbrace{|(\mu_1+\mu_2)(E_j)|}_{\leq |\mu_1(E_j)| + |\mu_2(E_j)|}$$

$$\leq \underbrace{\left(\sup_{\dots} \sum_j |\mu_1(E_j)|\right)}_{\|\mu_1\|} + \underbrace{\left(\sup_{\dots} \sum_j |\mu_2(E_j)|\right)}_{\|\mu_2\|}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ ist Norm, da $\|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ und $\|\mu\| = 0 \Rightarrow \mu = 0$ klar

Vollständigkeit: Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathcal{M}(\Omega,\Sigma)$.

$\overset{A\in\Sigma}{\Rightarrow}$ $|\mu_n(A) - \mu_m(A)| = |(\mu_n-\mu_m)(A)| \leq \|\mu_n - \mu_m\|$

also $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathbb{C}$ $\forall A\in\Sigma$

$\Rightarrow$ $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ exists $\forall A \in \Sigma$ (1)

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\overset{N_0(\varepsilon)}{N_0} \in \mathbb{N}$: $\|\mu_n - \mu_m\| < \varepsilon/2 \quad \forall n,m \geq N_0$

Sei $\dot{\bigcup}_{j=1}^{r} E_j = \Omega$ eine messbare disjunkte Zerlegung von Ω

Wähle $m \equiv m(\{E_j\}, \varepsilon) \geq N_0$: $\sum_{j=1}^{r} |\mu_m(E_j) - \mu(E_j)| < \varepsilon/2$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_0 \text{ gilt: } \sum_{j=1}^{r} |\mu_n(E_j) - \mu(E_j)|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \underbrace{|\mu_n(E_j) - \mu_m(E_j)|}_{(\mu_n - \mu_m)(E_j)}}_{\leq \|\mu_n - \mu_m\|} + \underbrace{\sum_{j=1}^{r} |\mu_m(E_j) - \mu(E_j)|}_{< \varepsilon/2}$$

$$< \varepsilon$$

N_0 unabh. von $\{E_j\}$ $\Rightarrow$ $$\lim_{n \to \infty} \sup_{\dot{\bigcup}_{j=1}^{r} E_j = \Omega} \sum_{j=1}^{r} |\mu_n(E_j) - \mu(E_j)| = 0 \quad (2)$$

Nun: σ-Additivität von μ (Additivität klar per def.)

sei $A, A_j \in \Sigma \ \forall j \in \mathbb{N}$ und $A = \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j$, seien $k, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left|\mu\Big(\dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) - \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)\right| \underset{\text{Additiv}}{=} \left|\mu\Big(\dot{\bigcup}_{j>k} A_j\Big)\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|(\mu - \mu_n)\Big(\dot{\bigcup}_{j>k} A_j\Big)\right|}_{=: I_{n,k}} + \underbrace{\left|\mu_n\Big(\dot{\bigcup}_{j>k} A_j\Big)\right|}_{\overset{\sigma\text{-additiv}}{=} \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \mu_n(A_j)}_{=: II_{n,k}}}$$

Let $\varepsilon > 0$

(i) Sei $E_{1,k} := \dot{\bigcup}_{j>k} A_j$, $E_{2,k} := \Omega \setminus E_{1,k}$

$\overset{(2) \text{ mit } r=2}{\Rightarrow}$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} I_{n,k} < \varepsilon/2$

(ii) fixiere $n \geq N(\varepsilon)$; μ_n ist σ-additive

$$\Rightarrow \quad \exists\, \tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, n) : \forall k \geq \tilde{k} \;\; \mathrm{II}_{n,k} < \varepsilon/2$$

(i) $\wedge$ (ii) $\Rightarrow$ μ ist σ-additiv. $\Rightarrow$ μ ist komplexes Maß

$\Rightarrow$ (α) besagt $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ vollständig ∎

$\boxed{\text{1.15. Definition}}$ Sei Ω ein topologisches Raum.

( )

$$\mathcal{M}(\Omega) := \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}) \quad \leftarrow \text{Borel } \sigma\text{-Algebra}$$

Def. I.3.39

$$\mathcal{M}_r(\Omega) := \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega) : |\mu| \text{ ist regulär}\} \subset \mathcal{M}(\Omega)$$

1.16. Bemerkung. • $\mathcal{M}_r(\Omega)$ ist abgeschlossen ($\varepsilon/3$-Argument) $\Rightarrow$ Banach-Raum

• Sei K ein kompaktes metrisches Raum $\Rightarrow \mathcal{M}_r(K) = \mathcal{M}(K)$ (vgl. Bew. von Satz I.3.38)

( ) $\boxed{\text{1.17. Satz}}$ (Riesz-Markov)

Sei K ein kompaktes topologisches Raum. Dann ist

$$J : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_r(K) & \longrightarrow & C(K)^* \\ \mu & \longmapsto & J\mu \end{array} \qquad (J\mu)(f) := \int_K d\mu(x)\, f(x) := \int_K d|\mu|(x)\, \phi_\mu(x) f(x)$$

ein isometrisches Isomorphismus.

Außerdem: μ positives Maß $\Leftrightarrow (J\mu)(f) \geq 0 \;\forall\; 0 \leq f \in C(K)$.

Beweis.

• J wohldef., d.h. $J\mu \in C(K)^*$:

klar, $J\mu : f \mapsto (J\mu)(f)$ linear.

$$\|J\mu\| = \sup_{0 \neq f \in C(K)} \frac{|(J\mu)(f)|}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{0 \neq f \in C(K)} \frac{\int_K d|\mu|(x)\, |f(x)|}{\|f\|_\infty} \leq \|\mu\| \tag{1}$$

- <u>J Isometrie</u>: $|\mu|$ regulär $\Rightarrow$ $C(K)$ dicht in $\mathcal{L}^1(K,|\mu|)$

  (vgl. Satz I.3.38; metrisierbar wird dort nur für Regularität des Maßes benutzt)

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Sei } (f_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset C(K)\\ \text{mit } \|f_k\|_\infty = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \|\mu\| = |\mu|(K) = \int_K d|\mu|(x)\ \Phi_\mu(x)\left[\overline{\Phi}_\mu(x) - f_k(x)\right] + (J\mu)(f_k)$$

  $$\Rightarrow \|\mu\| \le \underbrace{\|\overline{\Phi}_\mu - f_k\|_{\mathcal{L}^1(K,|\mu|)}}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\ 0} + \|J\mu\| \qquad (2)$$

  $$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \|\mu\| = \|J\mu\|$$

- <u>Linearität</u>

  Indikatorflt. von A

  Für $f = \chi_A$, $A\in\mathfrak{B}$ und $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}_r(K)$

  $$\Rightarrow \int_K d\mu_1(x)\ \chi_A(x) + \int_K d\mu_2(x)\ \chi_A(x) = \int_K d(\mu_1+\mu_2)(x)\ \chi_A(x)$$

  nach Satz 1.13 (6) und Additivität von μ.

  Zerlege $C(K)\ni f = f_1 - f_2 + i f_3 - i f_4$ und approximiere $f_j \ge 0$ von unten durch Elementarflt.
  (vgl. nach Def. des Integrals u. maj. Kgz.)

  $$\Rightarrow J\mu_1 + J\mu_2 = J(\mu_1+\mu_2)$$

- <u>Surjektivität</u> (Bew. idee)

  (i) Sei $\ell\in C(K)^*$ und – zunächst – $\ell(f)\ge 0\ \ \forall\ 0\le f\in C(K)$

  Für A offen setze

  $$\mu^*(A) := \sup\{\ell(f) : f\in C(K), \text{reell}, 0\le f\le \mathbb{1}_A\}$$

  und für bel. $T\subseteq K$:

  $$\mu^*(T) = \inf\{\mu^*(A) : A \text{ offen}, A\supseteq T\}$$

  Zeige: μ^* ist äußeres Maß und offene Mengen sind μ^*-messbar

  $\Rightarrow$ Satz von Carathéodory: $\mu := \mu^*|_{\mathfrak{B}}$ ist reguläres Maß
  (vgl. Bauer: Maß- u. Integrationstheorie, Satz 5.3) Zeige: $\int d\mu\, f = \ell(f)\ \forall f\in C(K)$

(ii) Für allg $\ell \in C(K)^*$ zerlege $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ gemäß

$$\ell_1(f) := \mathrm{Re}\,\ell(\mathrm{Re} f) - \mathrm{Im}\,\ell(\mathrm{Im} f)$$
$$\ell_2(f) := \mathrm{Re}\,\ell(\mathrm{Im} f) + \mathrm{Im}\,\ell(\mathrm{Re} f)$$

Jedes der 2 reellen Funktionale $\mathrm{Re}\,\ell, \mathrm{Im}\,\ell : C_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$

zerlege in Positiv- u. Negativteil wie in Werner, S.64 dem.

Wende (i) an $\Rightarrow$ Jordan-Zerlegung des ges. Maßes ∎