1.5. Spektralmaße

1.21. Definition Sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \to BL(\mathcal{H}), \quad B \mapsto P(B) \text{ heißt } \underline{\text{Spektralmaß}}$$

(bzw. Projektor-wertiges Maß) $:\Leftrightarrow$

- $P(B)$ ist Orthogonalprojektor $\forall B \in \mathcal{B}$
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$
- $\forall B_n \in \mathcal{B}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ für $n \neq m \in \mathbb{N}$ gilt

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)\,\psi \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

(stark σ-additiv)

1.22. Lemma Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$. Dann ist

$$\mathcal{B} \ni B \mapsto \chi_B(A) =: P(B) \quad \text{ein Spektralmaß}$$

mit Träger $\operatorname{spec}(A)$, d.h. $P(B) = 0$ für $B \in \mathcal{B} \cap (\mathbb{R} \setminus \operatorname{spec}(A))$.

Beweis.

- $P(B)$ ist Orthogonalproj., wegen Satz 1.19 (b) und

$$\chi_\cdot \overline{\chi_\cdot} = \chi_\cdot$$

- $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$ nach Satz 1.19 (a), $P(\emptyset) = 0$ folgt aus
- Starke σ-Additivität: aus Satz 1.19 (d) mit Kor. 1.20 (b), da für $f_n := \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_n} \in \mathbb{B}(\operatorname{spec}(A))$ gilt

$$\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \operatorname{spec}(A)$$

(wegen B_n paarw. disjunkt)

1.23. Bemerkung

σ- Additivität gilt i.A. nicht in der Operatornorm, da

$$\| \chi_B(A) \| \in \{0,1\} \quad (=0 \Leftrightarrow \chi_B(A) = 0)$$

Nun Integration bzgl. eines Spektralmaßes P:

1.24 Lemma Sei P ein Spektralmaß.
Für $n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

sei $f_n := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j}$ eine Treppenfunktion und

$$\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f_n(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, P(B_j). \qquad (1)$$

Sei $f \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f_n(\lambda) \qquad (2)$$

existiert in der Operatornorm und ist unabh. von der Wahl der approx. Folge.

Beweis

- (1) ist wohldef., d.h. hängt nicht von der Darstellung der Treppenfkt. $f_n = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j} = \sum_k \tilde{\alpha}_k \chi_{\tilde{B}_k}$ ab wegen

  Additivität von P.

- Existenz der glm. konvergenten Folge f_n von Treppenfkt.'en $\rightsquigarrow$ Übung!

- Wir zeigen $\boxed{\left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty}$ (3)

6. Vorl.

für jede Treppenfkt. $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Denn sei $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j}$ und $\psi \in \mathcal{H}$

$\leftarrow$ o.E. paarw. disjunkt, $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\psi\, f(\lambda) \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, P(B_j)\psi \right\|^2$$

Pythagoras und $\operatorname{ran}(P(B_j))$ paarw. orthogonal, da B_j paarw. disjunkt $\rightsquigarrow$ Übung

$$= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \, \|P(B_j)\psi\|^2$$

$$\leq \underbrace{\max_{1\leq j\leq n} |\alpha_j|^2}_{\|f\|_\infty^2} \; \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|P(B_j)\psi\|^2}_{\left\| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)}_{P(\bigcup_j B_j) = P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}} \psi \right\|^2}$$

$$\Rightarrow \left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) \right\| = \sup_{0\neq\psi\in\mathcal{H}} \frac{\left\| \int dP(\lambda)\psi\, f(\lambda) \right\|}{\|\psi\|} \leq \|f\|_\infty$$

✓

- (3) $\Rightarrow$ – $\left(\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f_n(\lambda) \right)_n$ in (2) ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|$ in $BL(\mathcal{H})$ $\Rightarrow$ Limes existiert (in $\|\cdot\|$)

  – Limes in (2) unabh. von approx. Folge (überlegen!)

Zusammenfassung

1.25. Korollar Sei P ein Spektralmaß. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{BL}(\mathcal{H}) \\ f &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) \end{aligned}$$

ist wohldef., linear u. stetig. Es gilt $\left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty$.

Ist f reellwertig, so ist $\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda)$ selbstadjungiert. Ist $P(K) = \mathbb{1}$ für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so gilt $\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda)\, \chi_K(\lambda) =: \int_K dP(\lambda)\, f(\lambda)$$

d.h.: $\int_K dP(\lambda)\, f(\lambda)$ ex. $\forall f \in \mathcal{B}(K)$