1.6. Spektralsatz

Bislang (Lemma 1.22): selbstadj. Op. $A \in BL(\mathcal{H})$ erzeugt Spektralmaß $\chi_{\bullet}(A)$

Jetzt: Umkehrung

$\boxed{\text{1.26. Satz}}$ Sei P ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $A := \int_{\mathbb{R}} P(d\lambda)\, \lambda$. Dann ist $A^* = A \in BL(\mathcal{H})$ und

$$\underline{\Psi}: \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \longrightarrow BL(\mathcal{H})$$
$$f \longmapsto \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)\, f(\lambda) =: \Psi(f)$$

der eindeutig bestimmte messbare Funktionalkalkül zu A aus Satz 1.19, insbesondere ist $P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$.

Beweis. Zu zeigen: Ψ erfüllt alle Eigenschaften (a) bis (d) des messbaren Funktionalkalküls aus Satz 1.19.

Kor 1.25 $\Rightarrow$ Ψ ist linear u. stetig

Für Treppenfunktionen $f, g \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ gilt

$$\Psi(f) \cdot \Psi(g) = \Psi(f \cdot g) = \Psi(g) \cdot \Psi(f) \quad \text{wegen}$$

$$P(B_1) \cdot P(B_2) = P(B_1 \cap B_2)$$

$\Rightarrow$ gilt $\forall f, g \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ mittels Approx. durch Treppenfkt. & Stetigkeit von Ψ

Analog: $\Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^* \quad \forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$

Somit ist (b), (c) aus Satz 1.19 gezeigt.

zu (d): sei $f_n \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \; \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$

und $f_n \to f \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ punktweise

seien $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ bel. fix. Dann ist

$$\langle \varphi, \Psi(f_n) \psi \rangle = \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda) \; f_n(\lambda)$$

mit $\mu_{\varphi,\psi} := \langle \varphi, P(\bullet) \psi \rangle$ ein komplexes Maß auf $\mathrm{spec}(A)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \langle \varphi, \Psi(f_n) \psi \rangle = \langle \varphi, \Psi(f) \psi \rangle$$

mittels major. Kgz.

zu (a): Zeige $P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$ $\quad \left(\Rightarrow A = \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda) \, \lambda \right)$

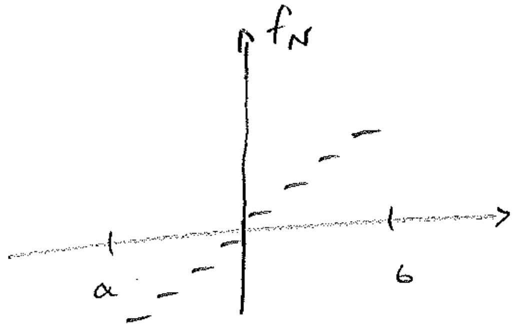
n.V. ist supp P kompakt $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$:
$\mathrm{supp}\, P \cup \mathrm{spec}(A) \subseteq \,]a, b]$, insbes. $P(]a,b]) = \mathbb{1}$

Approx. A durch Spektralintegral der Treppenfkt.:

$$f_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \chi_{]a_{k-1}, a_k]}, \quad a_k := a + k\delta, \quad \delta := \frac{b-a}{N}, \quad N \in \mathbb{N}$$

Sei $\mu \in \mathbb{R}$

$$\Big\| A-\mu - \int_{]a,b]} dP(\lambda)\,[f_N(\lambda)-\mu] \Big\|$$



$P(]a,b]) = \mathbb{1} \longrightarrow \quad = \Big\| A - \int_{]a,b]} dP(\lambda)\, f_N(\lambda) \Big\|$

$A = \int_{]a,b]} dP(\lambda)\,\lambda \longrightarrow \quad \overset{\text{Kor. 1.25}}{\leq} \| id - f_N \|_{\infty,\,]a,b]} \leq \delta$

> Übung: Sei $S, T \in BL(\mathcal{H})$, T^{-1} ex. in $BL(\mathcal{H})$
> und $\|S-T\| \leq \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$
> $\Rightarrow$ S^{-1} ex. in $BL(\mathcal{H})$ und $\|S^{-1}\| \overset{(*)}{\leq} 2\|T^{-1}\|$

Sei nun $\mu \in \varrho(A)$ $\Rightarrow$ $T := A-\mu$ $(T^{-1} \in BL(\mathcal{H}))$ und somit

$$S := \int_{]a,b]} dP(\lambda)\,[f_N(\lambda)-\mu] = \sum_{k=1}^{N} (a_k-\mu)\, \underbrace{P(]a_{k-1},a_k])}_{=:\,P_k} \quad \text{invertierbar}$$

in $BL(\mathcal{H})$ für N hinreichend groß (so dass δ hinr. klein)

Insbes. für $\delta \leq \frac{\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}(A))}{2}$ gilt $\|S^{-1}\| \overset{(*)}{\leq} \frac{2}{\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}(A))}$

andererseits $S^{-1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k-\mu} P_k$

$$\Rightarrow \|S^{-1}\| = \sup_{\substack{k=1,\dots,N \\ P_k \neq 0}} \left\{ \frac{1}{|a_k-\mu|} \right\}$$

Also gilt $P_k = 0$, falls $|a_k-\mu| < \frac{\operatorname{dist}(\mu, \operatorname{spec}(A))}{2}$

d.h. zu $\mu \in \varrho(A)$ $\exists$ Umgebung $U_\mu \subset \mathbb{R}$ mit $P(U_\mu) = 0$

7. Vorl.

Sei $K \subset \varrho(A)$ kompakt; überdecke $K \subseteq \dot{\bigcup}_{\ell=1}^{L} U_{\mu_\ell}$, $\mu_\ell \in K$,

$\Rightarrow \; P(K) = 0$

$\Rightarrow \; P([a,b] \cap \varrho(A)) = 0$, denn $\forall \psi \in \mathcal{H}$ ist

$\mu_\psi := \langle \psi, P(\cdot)\psi \rangle$ ein Borel-Maß auf $[a,b]$

$\Rightarrow \mu_\psi$ ist regulär (vgl. Bem 1.16 bzw. I.3.38)

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_\psi([a,b] \cap \varrho(A))}_{\| P([a,b] \cap \varrho(A))\psi\|^2} = \sup_{\substack{K \subset [a,b] \cap \varrho(A) \\ K \text{ kompakt}}} \mu_\psi(K) = 0$$

✓

Da $P(\mathbb{R} \setminus [a,b]) = 0 \Rightarrow P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$

■

$\boxed{\text{1.27. Korollar}}$ (Spektralsatz für beschr., selbstadj. Operatoren)

Es existiert genau eine Bijektion zwischen der Menge der selbstadj. Operatoren in $BL(\mathcal{H})$ und der Menge der Spektralmaße auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, so dass

$$A = \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)\, \lambda \quad \text{und} \quad P(B) = \chi_B(A) \;\; \forall B \in \mathcal{B}$$

gilt.[⊛] Die Abb.

$$\mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \longrightarrow BL(\mathcal{H})$$
$$f \longmapsto \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)\, f(\lambda)$$

realisiert den messbaren Funktionalkalkül $\hat{\Phi}$ aus Satz 1.19.

⊛ Insbesondere ist $\mathrm{supp}(P) = \mathrm{spec}(A)$.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} \text{selbstadj. beschr. Operatoren } A \arrow[r, bend left, "\alpha:\, A \mapsto \chi_\circ(A) \quad [\text{Lemma } 1.22]"] & \text{Spektralmaße mit kpt. Träger } P \arrow[l, bend left, "\Psi:\, P \mapsto \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\,\lambda \quad [\text{Satz } 1.26]"] \end{tikzcd}$$

- Satz 1.26 $\Rightarrow \Psi$ ist injektiv
- Noch zu zeigen: $\Psi \circ \alpha = id$

$\left.\right\}$ Beh.

Sei also $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$, $P := \chi_\circ(A)$ das zugehörige Spektralmaß und $S := \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\,\lambda \in BL(\mathcal{H})$. Zeige: $S = A$

Satz 1.26 $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}(P) = \operatorname{spec}(A)$ kompakt. Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathbb{B}(\operatorname{spec}(A))$ eine Treppenfkt. mit $\| f - id \|_\infty \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \| A - S \| \leq \underbrace{\| A - f(A) \|}_{\leq \| id - f \|_\infty \leq \varepsilon \text{ (Satz 1.19)}} + \underbrace{\| f(A) - \Psi(f) \|}_{(*)} + \underbrace{\| \overset{\int dP(\lambda) f(\lambda) \text{ aus Satz 1.26}}{\Psi(f)} - S \|}_{\leq \| f - id \|_\infty \leq \varepsilon \text{ (Kor. 1.25)}} \leq 2\varepsilon$$

$(*) = 0$, da $f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{B_j}$

$$\Rightarrow f(A) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \underbrace{\chi_{B_j}(A)}_{P(A)} = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, f(\lambda) = \Psi(f)$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow A = S$ ∎

1.28. Beispiele

(i) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$; $A = A^*$ eine $n \times n$-Matrix

$\rightarrow$ siehe Kapitel 1.1

(ii) $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ kompakt $\Rightarrow$ (Satz von Hilbert-Schmidt, I.5.39)

$\exists$ Nullfolge $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ von Eigenwerten und ONB $\{\psi_n\}_n$ in $\mathcal{H}$ von zugeh. Eigenvektoren, $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$, sodass

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \, \psi_n \otimes \psi_n \, . \qquad (\text{Kgz. in Op.norm})$$

Es gilt $\quad A = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\, \lambda \quad$ mit

$$P(B) := \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}: \\ \lambda_n \in B}} \psi_n \otimes \psi_n \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

$\leftarrow$ kgt. nur stark (falls ∞ viele n's in der Summe)

(iii) Multiplikationsoperator auf $L^2([0,1])$

$$(A\psi)(x) := x\,\psi(x) \qquad \forall x \in [0,1] \quad \forall \psi \in L^2([0,1])$$

erfüllt $A = A^*$, $\|A\| = 1$ (überlege!)

Beh.: Für das Spektralmaß P von A gilt

$$\underbrace{\langle \psi, P(B)\varphi \rangle}_{=: \mu_{\psi,\varphi}(B)} = \int_B dx\, \overline{\psi(x)}\, \varphi(x) \qquad \forall \psi, \varphi \in L^2([0,1]) \quad \forall B \in \mathcal{B} \cap [0,1]$$

da $\quad \langle \psi, A\varphi \rangle = \int_{[0,1]} dx\, \overline{\psi(x)}\, x\, \varphi(x) = \int_{[0,1]} d\mu_{\psi,\varphi}(x)\, x$

$$= \left\langle \psi, \int_{[0,1]} dP(x)\, x \;\varphi \right\rangle$$

1.29. Korollar Seien $A, S \in \mathcal{Bl}(\mathcal{H})$, $A = A^*$.

Dann gilt

$$[A,S] := AS - SA = 0 \iff [S, \chi_B(A)] = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Bew.: $[A,S] = 0 \iff [A^n, S] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ \int\limits_{spec(A)} d\mu_{\psi, S\varphi}(\lambda)\, \lambda^n = \int\limits_{spec(A)} d\mu_{S^*\psi, \varphi}(\lambda)\, \lambda^n \end{array} \right.$$

Stone-Weierstraß: Maße stimmen auf $C(spec(A))$ überein
$\Rightarrow$ Riesz-Markov: sind gleich

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{B} \\ \mu_{\psi, S\varphi}(B) = \mu_{S^*\psi, \varphi}(B) \end{array} \right.$$

$$\iff \forall B \in \mathcal{B} \quad \chi_B(A) S = S \chi_B(A)$$

■

Der Name Spektralmaß wird nochmals gerechtfertigt im folgenden Abschnitt