1.7. Zerlegungen des Spektrums

Zuerst eine alternative Beschreibung des Spektrums

1.30. Satz Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ und $P := \chi_\circ(A)$ das zugeh. Spektralmaß. Dann gilt:

(a) $\lambda \in \varrho(A) \iff \exists$ offene Umgebung U von λ in $\mathbb{R}$:
$$P(U) = 0$$

(b) λ ist ein Eigenwert von A $\iff P(\{\lambda\}) \neq 0$

In diesem Fall ist $P(\{\lambda\})$ der Projektor auf den zugehörigen Eigenraum

(c) Isolierte Punkte von $\operatorname{spec}(A)$ sind Eigenwerte

d.h. $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ und $\exists$ offene Umgebung U von λ in $\mathbb{R}$ mit $U \setminus \{\lambda\} \subset \varrho(A)$ $[\iff U \cap \operatorname{spec}(A) = \{\lambda\}]$

Beweis. (a) "$\Rightarrow$" aus $P(\varrho(A)) = 0$ (Satz 1.26)

"$\Leftarrow$" Sei U Umgebung von λ mit $P(U) = 0$

Setze
$$f : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda}, & t \in \operatorname{spec}(A) \cap U^c \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sei $g : t \mapsto t - \lambda$ für $t \in \operatorname{spec}(A)$.

$$\Rightarrow f(A)(A-\lambda) = f(A)g(A) = (f \cdot g)(A) = \chi_{U^c}(A) = P(U^c)$$
$$= \mathbb{1}, \text{ da } P(U) = 0$$

analog $(A-\lambda)f(A) = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; \lambda \in \varrho(A)$

(b) Beh. folgt aus $\operatorname{ran} P(\{\lambda\}) = \ker(A-\lambda)$ $\quad(*)$

Bew. von $(*)$: "$\subseteq$": sei $\psi \in \operatorname{ran} P(\{\lambda\}) \;\Rightarrow\; P(\{\lambda\})\psi = \psi$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{H}: \langle \varphi, (A-\lambda)\psi\rangle = \langle \varphi, (A-\lambda)P(\{\lambda\})\psi\rangle$$

$$= \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mu_{\varphi,\psi}(\eta)\; \underbrace{(\eta-\lambda)\,\chi_{\{\lambda\}}(\eta)}_{=0\ \forall \eta \in \mathbb{R}} = 0$$

$\Rightarrow \psi \in \ker(A-\lambda)$ ✓

"$\supseteq$" sei $\psi \in \ker(A-\lambda) \;\Rightarrow\; f(A)\psi = f(\lambda)\psi \quad \forall f \in C(\operatorname{spec}(A))$

nach Satz 1.8(c)

Kor. 1.25 + Approx.argument mit stetigen Funktionen

$$\Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi \qquad \forall f \in \mathcal{B}(\operatorname{spec}(A))$$

Wähle $f = \chi_{\{\lambda\}} \;\Rightarrow\; P(\{\lambda\})\psi = \underbrace{\chi_{\{\lambda\}}(\lambda)}_{1}\,\psi$ ✓

(c) Wähle U offen mit $U \cap \operatorname{spec}(A) = \{\lambda\}$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} P(U \setminus \{\lambda\}) = 0$, falls auch $P(\{\lambda\}) = 0$

$\Rightarrow P(U) = 0$ ↯ da $U \not\subseteq \varrho(A)$, also $P(\{\lambda\}) \neq 0$ ∎

8. Vol.

$\boxed{\text{1.31 Korollar}}$ $\operatorname{spec}(A)$ ist die kleinste kompakte Menge in $\mathbb{R}$ mit $P(\operatorname{spec}(A)) = \mathbb{1}$.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $P(K) = \mathbb{1}$ und $\lambda \notin K$

$\Rightarrow \exists$ off. Umg. U von λ mit $P(U) = 0 \overset{\text{Satz 1.30}}{\Rightarrow} \lambda \in \varrho(A)$,

also $K^c \subseteq \varrho(A) \;\Rightarrow\; K \supseteq \operatorname{spec}(A)$ ∎

1.32. Definition Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ und P das zugeh. Spek.maß.

$$\{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : \dim P(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

$=: \operatorname{spec}_{ess}(A)$ wesentliches Spektrum

$\operatorname{spec}_{disc}(A) := \operatorname{spec}(A) \setminus \operatorname{spec}_{ess}(A)$ diskretes Spektrum

(disjunkte Zerlegung des Spektrums)

1.33. Satz $\operatorname{spec}_{ess}(A)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{spec}_{ess}(A)$, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/2 \quad \Rightarrow$

$$B_\varepsilon(\lambda) \supseteq B_{\varepsilon/2}(\lambda_n) \Rightarrow \dim P(B_\varepsilon(\lambda))$$

$$\geq \dim P(B_{\varepsilon/2}(\lambda_n)) = \infty$$

■

1.34. Beispiel Sei $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB in $\mathcal{H}$ und

$$A := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \psi_n \otimes \psi_n \qquad \text{(kompakt, selbstadj.)}$$

$\Rightarrow \operatorname{spec}_{disc}(A) = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$ nicht abgeschlossen.

Häufungspunkt $0 \in \operatorname{spec}_{ess}(A)$

$\operatorname{spec}(A) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$.

1.35. Satz

$$\lambda \in \operatorname{spec}_{disc}(A) \iff \begin{cases} \text{(i)} & \lambda \text{ ist isoliertes Eigenwert von } A \\ \text{(ii)} & \lambda \text{ hat } \underline{\text{endliche Multiplizität}}, \\ & \text{d.h. } \dim\{\psi \in \mathcal{H} : A\psi = \lambda\psi\} < \infty \end{cases}$$

Beweis: Übung!

Wiederholung:

Lebesgue-Zerlegung eines σ-endlichen Borel-Maßes μ auf $\mathbb{R}$:
(vgl. Kap. I.3.4)

$$\exists_1 \text{ Zerlegung } \mu = \underbrace{\mu_{ac} + \overbrace{\mu_{sc} + \mu_{pp}}^{=:\mu_s \text{ singul. Anteil}}}_{=:\mu_c \text{ stetiger Anteil}} \quad \text{in Borel-Maße,}$$

wobei $\mu_{ac} \ll$ Leb., $\mu_s \perp$ Leb. und μ_{pp} ist der reine Punktanteil von μ. Insbesondere sind $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ paarweise singulär.

// 9 Vorl.

1.36. Definition Sei $A = A^* \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H}_{pp}(A) \equiv \mathcal{H}_{pp} := \overline{\operatorname{span}\{\psi \in \mathcal{H} : \exists \lambda \in \operatorname{spec}(A) \text{ mit } A\psi = \lambda\psi\}}$

reiner Punktspektralteilraum (bzgl. A) ("pure point")

$\mathcal{H}_c(A) \equiv \mathcal{H}_c := \mathcal{H}_{pp}^{\perp}$ stetiger Spektralteilraum

$\mathcal{H}_{sc}(A) \equiv \mathcal{H}_{sc} := \{\psi \in \mathcal{H}_c : \exists \text{ Leb. Nullm. } N \subset \mathbb{R} \text{ mit } \chi_N(A)\psi = \psi\}$

($\Leftrightarrow \mu_\psi \perp$ Leb.)

singulär-stetiger Spektralteilraum

$\mathcal{H}_s(A) \equiv \mathcal{H}_s := \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp}$ singulärer Spektralteilraum

$\mathcal{H}_{ac}(A) \equiv \mathcal{H}_{ac} := \mathcal{H}_{sc}^{\perp} \cap \mathcal{H}_c$ absolut-stetiger Spektralteilraum

$\boxed{1.37.\ \text{Lemma}}$ Alle spektralen Teilräume aus Def. 1.36 sind abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$.

<u>Beweis.</u> Dies ist nur für $\mathcal{H}_{sc}$ zu zeigen, Rest klar!

Seien $\psi_k \in \mathcal{H}_{sc}$, $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \exists\, N_k \subset \mathbb{R}$ Leb. Nullm. mit $\chi_{N_k}(A)\psi_k = \psi_k$ $\Rightarrow$ $N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N$ ist Nullmenge

$$\Rightarrow \quad \chi_N(A)\psi_k = \psi_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \chi_N(A)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \quad , \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

d.h. $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in \mathcal{H}_{sc}$, also $\mathcal{H}_{sc}$ ist Unterraum.

Sei nun $\psi_k \xrightarrow{k\to\infty} \psi \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow \quad \chi_N(A)\psi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit}}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\chi_N(A)\psi_k}_{\psi_k} = \psi$$

$$\Rightarrow \quad \psi \in \mathcal{H}_{sc}$$

■

$\boxed{1.38.\ \text{Satz}}$ Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ und für $\psi \in \mathcal{H}$ sei $\mu_\psi := \langle \psi, \chi_\bullet(A)\psi\rangle = \|\chi_\bullet(A)\psi\|^2$ das zugehörige Spektralmaß. Dann gilt für $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$:

(a) $\psi \in \mathcal{H}_{pp}(A) \iff \mu_\psi = \mu_{\psi,pp}$

(b) $\psi \in \mathcal{H}_c(A) \iff \mu_\psi = \mu_{\psi,c} \quad (\iff \mu_\psi(\{\lambda\}) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R})$

(c) $\psi \in \mathcal{H}_s(A) \iff \mu_\psi = \mu_{\psi,s} \quad (\iff \mu_\psi \perp \text{Leb.})$

(d) $\psi \in \mathcal{H}_{ac}(A) \iff \mu_\psi = \mu_{\psi,ac} \quad (\iff \mu_\psi \ll \text{Leb.})$

Weiter gilt: $\mathcal{H}_{sc} \perp \mathcal{H}_{pp}$, $\mathcal{H}_{ac} \perp \mathcal{H}_{pp}$, $\mathcal{H}_{sc} \perp \mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{sc}$
$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{sc} + \mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$

Beweis. (a) "$\Rightarrow$" sei $\psi \in \mathcal{H}_{pp} \Rightarrow \psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \psi_n$, $c_n \in \mathbb{C}\ \forall n$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \|\psi\|^2$, $\{\psi_n\}_n$ Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\mathcal{H}$; Sei $B := \{\lambda \in \mathbb{R} : A\psi_n = \lambda\psi_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ (höchstens abzählbar)

$$\Rightarrow \mu_\psi(B) = \sum_{\lambda\in B} \underbrace{\mu_\psi(\{\lambda\})}_{\langle \psi,\ \underbrace{\chi_{\{\lambda\}}(A)\psi}_{\sum_{n\in\mathbb{N}:\ \lambda_n=\lambda} c_n\psi_n} \rangle} \overset{\text{Satz 1.30}}{} = \underbrace{\sum_{\lambda\in B} \sum_{n\in\mathbb{N}:\ \lambda_n=\lambda}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}}} |c_n|^2$$

$$\Rightarrow \mu_\psi(\mathbb{R}\setminus B) = \mu_\psi(\mathbb{R}) - \mu_\psi(B) = \|\psi\|^2 - \|\psi\|^2 = 0$$

"$\Leftarrow$" sei $\psi \in \mathcal{H}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar mit $\mu_\psi(B) = \|\psi\|^2$
sei $B = \{s_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. ($s_n$ paarw. disjunkt)

$$\Rightarrow \|\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{s_n\}}(A)\psi}_{=:\ \phi}\|^2 \underset{\substack{\text{Pythagoras,}\\ \text{Aufgabe}}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\|\chi_{\{s_n\}}(A)\psi\|^2}_{\mu_\psi(\{s_n\})} = \|\psi\|^2$$

$$\Rightarrow \|\psi - \phi\|^2 \underset{\phi \perp \psi-\phi}{=} \|\psi\|^2 - \|\phi\|^2 = 0 \Rightarrow \psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{s_n\}}(A)\psi$$

Da $t\,\chi_{\{s_n\}}(t) = s_n\,\chi_{\{s_n\}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Funkt.kalk.

$\Rightarrow \quad A\,\chi_{\{s_n\}}(A)\psi = s_n\,\chi_{\{s_n\}}(A)\psi$ also $\chi_{\{s_n\}}(A)\psi \in \mathcal{H}_{pp}$

$\forall n$

$\Rightarrow \quad \psi \in \mathcal{H}_{pp}$ ✓

(b) Übung!

(c) "$\Rightarrow$" Sei $\psi \in \mathcal{H}_s := \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp} \Rightarrow \psi = \underbrace{\psi_{sc}}_{\in \mathcal{H}_{sc}} + \underbrace{\psi_{pp}}_{\in \mathcal{H}_{pp}}$

$\Rightarrow$ • $\exists\, B \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $\chi_B(A)\psi_{pp} = \psi_{pp}$

• $\exists\, N \subset \mathbb{R}$ Leb. Nullm. mit $\chi_N(A)\psi_{sc} = \psi_{sc}$ (b.w.)

$$\Rightarrow \quad \chi_{B\cup N}(A)\psi = \underbrace{\chi_{B\cup N}(A)\psi_{sc}}_{\underbrace{\chi_B(A)\psi_{sc}}_{\psi_{sc}} + \underbrace{\chi_{(B\cup N)\setminus B}(A)\underbrace{\psi_{sc}}_{\chi_B(A)\psi_{sc}}}_{0}} + \chi_{B\cup N}(A)\psi_{pp}$$

$$= \psi_{sc} + \psi_{pp} = \psi$$

$\Rightarrow \mu_\psi$ ist auf Leb. Nullmenge $B\cup N$ konzentriert, also $\perp$ Leb.

"$\Leftarrow$" sei $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\mu_\psi \perp$ Leb. $\Rightarrow \exists$ Leb. Nullm. $N \subset \mathbb{R}$: $\chi_N(A)\psi = \psi$. Da $\mu_\psi(\mathbb{R}) < \infty$ existiert genau eine, höchstens abzählb. Menge $B = \{s_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\mu_\psi(\{s_n\}) > 0$ und $\mu_\psi(\{\lambda\}) = 0 \quad \forall \lambda \notin B$.

41R

Sei $P = PP^*$ eine Orthog.proj. und

$\|P\psi\| = \|\psi\|$ für ein $\psi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \quad P\psi = \psi$

Bew.: $\|P\psi - \psi\|^2 = \|P\psi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\underbrace{\langle P\psi, \psi\rangle}_{\|P\psi\|^2} = 0$ ✓

sei $\psi_{pp} := \chi_B(A)\psi$, d.h. $\psi_{pp} \in \mathcal{H}_{pp}$

Zeige $\psi_{sc} := \psi - \psi_{pp} \in \mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_s \cap \mathcal{H}_c$. Dies gilt, da

- sei $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $A\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow$

$$\langle \psi_{sc}, \varphi \rangle := \langle \psi - \psi_{pp}, \varphi \rangle = \langle \psi - \chi_B(A)\psi, \chi_{\{\lambda\}}(A)\varphi \rangle$$

$$= \langle (\chi_{\{\lambda\}}(A) - \underbrace{\chi_{\{\lambda\}}(A)\chi_B(A)}_{\chi_{\{\lambda\}}(A)})\psi, \varphi \rangle = 0$$

also $\psi_{sc} \perp \mathcal{H}_{pp}$, d.h. $\psi_{sc} \in \mathcal{H}_{pp}^\perp = \mathcal{H}_c$

- für obige Nullmenge N gilt

$$\chi_N(A)\psi_{sc} = \chi_N(A)(\psi - \chi_B(A)\psi)$$

$$= (\mathbb{1} - \chi_B(A)) \underbrace{\chi_N(A)\psi}_{\psi \text{ n.V.}} = \psi_{sc}$$

$\Rightarrow \psi_{sc} \in \mathcal{H}_s$ ✓

(d) $$\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_{sc}^\perp \cap \underbrace{\mathcal{H}_c}_{\mathcal{H}_{pp}^\perp} = (\mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp})^\perp = \mathcal{H}_s^\perp$$

"$\Rightarrow$" sei $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$, sei N eine LeB. Nullmenge

$$\Rightarrow \mu_\psi(N) = \langle \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{H}_s^\perp}, \underbrace{\chi_N(A)\psi}_{\in \mathcal{H}_s} \rangle = 0 \Rightarrow \mu_\psi \ll \text{LeB.}$$

"$\Leftarrow$" $\forall \varphi \in \mathcal{H}_s \; \exists$ Nullmenge N_φ : $\varphi = \chi_{N_\varphi}(A)\varphi$

sei nun $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\mu_\psi \ll$ LeB. $\Rightarrow$

$$|\langle \psi, \underbrace{\varphi}_{\chi_{N_\varphi}(A)\varphi} \rangle| = |\langle \chi_{N_\varphi}(A)\psi, \varphi \rangle| \overset{CS}{\leq} \underbrace{(\mu_\psi(N_\varphi))^{1/2}}_{0} \|\varphi\| = 0 \Rightarrow \psi \in \mathcal{H}_s^\perp$$

Rest: Übung!

$\boxed{\text{1.39. Definition}}$ Für $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ und $\varkappa \in \{pp, sc, ac, s, c\}$ sei $P_\varkappa$ der Orthogonalprojektor $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_\varkappa(A)$

1.40. Bemerkung $P_{pp} P_{sc} = P_{pp} P_{ac} = P_{ac} P_{sc} = 0$,

$$P_s = P_{pp} + P_{sc}, \quad P_c = P_{sc} + P_{ac}, \quad P_{pp} + P_{sc} + P_{ac} = \mathbb{1}$$

$\boxed{\text{1.41. Satz}}$ Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$. Die Projektoren $P_\varkappa$, $\varkappa \in \{pp, sc, ac, s, c\}$, kommutieren untereinander und mit A. Insbesondere reduziert $P_\varkappa$ den Operator A, $\forall \varkappa$, d.h. $A = P_\varkappa A P_\varkappa + P_\varkappa^\perp A P_\varkappa^\perp$ mit $P_\varkappa^\perp = \mathbb{1} - P_\varkappa$

$$\text{“} \quad A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathcal{H}_\varkappa & \mathcal{H}_\varkappa^\perp \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A|_{\mathcal{H}_\varkappa} & 0 \\ \hline 0 & A|_{\mathcal{H}_\varkappa^\perp} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathcal{H}_\varkappa \\ \mathcal{H}_\varkappa^\perp \end{array} \end{array} \quad \text{”}$$

Unmittelbare Konsequenz:

$\boxed{\text{1.42. Korollar}}$ $A = P_{pp} A P_{pp} + P_{sc} A P_{sc} + P_{ac} A P_{ac}$

10. Vorl.

Bew. von Satz 1.41

Kommutieren der $P_\varkappa$ untereinander aus Bem. 1.40.

Falls $[P_\varkappa, A] = 0$ (siehe unten), dann $[P_\varkappa^\perp, A] = 0$ und

$$A = A(P_\varkappa + P_\varkappa^\perp) = \underbrace{A P_\varkappa}_{P_\varkappa A} P_\varkappa + P_\varkappa^\perp A P_\varkappa^\perp$$

Wir zeigen: $[P_{\mathfrak{x}}, \chi_B(A)] = 0 \quad \forall\, B \in \mathcal{B}$

$$\left(\overset{\text{Kor. 1.29}}{\Leftrightarrow} \quad [P_{\mathfrak{x}}, A] = 0 \right)$$

$\underline{\mathfrak{x} = pp}$: $\quad \forall\, \psi \in \mathcal{H}_{pp} \;\exists\, N \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $\chi_N(A)\psi = \psi$. (vgl. Bew. Satz 1.38(a))

$$\Rightarrow \forall\, B \in \mathcal{B}: \quad \chi_B(A)\psi = \chi_B(A)\,\chi_N(A)\,\psi = \chi_N(A)\,\chi_B(A)\,\psi \in \mathcal{H}_{pp}$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{H}: \qquad \chi_B(A)\,P_{pp}\,\varphi = P_{pp}\,\chi_B(A)\,P_{pp}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \chi_B(A)\,P_{pp} = P_{pp}\,\chi_B(A)\,P_{pp} \underset{\uparrow}{=} P_{pp}\,\chi_B(A) \qquad \checkmark$$

Adjungieren

$\underline{\mathfrak{x} = s}$: analog, mit N Nullmenge statt abzählbar

Die Fälle $\mathfrak{x} = pp$ und $\mathfrak{x} = s$ und Bem. 1.40 ergeben die restlichen Fälle für $\mathfrak{x}$. ∎

Erinnerung: $\mathcal{H}_{\mathfrak{x}}$ ist Hilbert-Raum $\forall \mathfrak{x}$ (Lemma 1.37)

1.43. Definition • Für $\mathfrak{x} \in \{pp, sc, ac, c, s\}$ ist

$$A_{\mathfrak{x}}: \begin{array}{l} \mathcal{H}_{\mathfrak{x}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{x}} \\ \psi \mapsto A\psi \end{array} \qquad \left(\text{wegen } A\psi = AP_{\mathfrak{x}}\psi \overset{\text{Satz 1.41}}{=} P_{\mathfrak{x}}AP_{\mathfrak{x}}\psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{x}}\right)$$

wohldef. und selbstadjungiert.

• $\operatorname{spec}_{\mathfrak{x}}(A) := \operatorname{spec}(A_{\mathfrak{x}})$ heißt das $\mathfrak{x}$-Spektrum von A.

Sprechweise: A hat in $I \subseteq \mathbb{R}$ reines $\mathfrak{x}$-Spektrum

$$:\Leftrightarrow \quad \operatorname{spec}_{\mathfrak{x}}(A) \cap I = \operatorname{spec}(A) \cap I$$

Per def. gilt: • $A_{\mathfrak{x}}$ hat reines $\mathfrak{x}$-Spektrum
• $\mathcal{H}_{\mathfrak{x}} = \{0\} \Rightarrow \operatorname{spec}_{\mathfrak{x}}(A) = \emptyset$

1.44 Lemma Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$. Dann gilt

(i) $\mathrm{spec}_\varkappa(A)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$ $\forall \varkappa$

(ii)
$$\begin{aligned}\mathrm{spec}(A) &= \mathrm{spec}_{pp}(A) \cup \mathrm{spec}_{sc}(A) \cup \mathrm{spec}_{ac}(A) \\ &= \mathrm{spec}_{pp}(A) \cup \mathrm{spec}_c(A) \\ &= \mathrm{spec}_s(A) \cup \mathrm{spec}_{ac}(A)\end{aligned}$$

(iii) $\mathrm{spec}_{pp}(A) = \overline{\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}}$

(iv) $\mathrm{spec}_{ac}(A)$ hat positives Lebesgue-Maß oder ist $\emptyset$

(v) $\mathrm{spec}_{sc}(A)$ ist überabzählbar oder $\emptyset$

1.45. Warnung

- Die Vereinigungen in 1.44 (ii) sind nicht notwendigerweise disjunkt!
- $\mathrm{spec}_{sc/pp}(A)$ kann positives Lebesgue-Maß haben!

Beweis von Lemma 1.44.

(i) klar, da $A_\varkappa = A_\varkappa^* \in BL(\mathcal{H}_\varkappa)$

(ii) Sei P Orthogonalproj. in $\mathcal{H}$, $P^\perp := \mathbb{1} - P$ und $[P,A] = 0$

$$\Rightarrow A - z = P(PAP - z)P + P^\perp(P^\perp A P^\perp - z)P^\perp$$
$$= (A_P - z) \oplus (A_{P^\perp} - z) = \left(\begin{array}{c|c} A_P - z & 0 \\ \hline 0 & A_{P^\perp} - z \end{array}\right)$$

mit $A_{P^{(\perp)}} : \begin{array}{l} P^{(\perp)}\mathcal{H} \to P^{(\perp)}\mathcal{H} \\ \psi \mapsto A\psi = P^{(\perp)} A P^{(\perp)} \psi \end{array}$

$\Rightarrow \quad z \in \varrho(A) \Leftrightarrow z \in \varrho(A_p) \cap \varrho(A_{p\perp})$

$\Rightarrow \quad \operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}(A_p) \cup \operatorname{spec}(A_{p\perp})$

(iii) "$\supseteq$" sei λ Eigenwert von A mit zugeh. Eigenvektor $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$

$\Rightarrow \quad A_{pp}\psi = \lambda\psi \Rightarrow \lambda \in \operatorname{spec}(A_{pp}) = \operatorname{spec}_{pp}(A)$

$\Rightarrow \quad \overline{\{\text{Eigenwerte}\}} \subseteq \overline{\operatorname{spec}_{pp}(A)} = \operatorname{spec}_{pp}(A)$

"$\subseteq$" sei $E \in \operatorname{spec}_{pp}(A)$

Ann.: $\exists\, \varepsilon > 0$: $\operatorname{dist}(E, \{\text{Eigenwerte}\}) > \varepsilon$

Weyl-Krit. $\Rightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{H}_{pp}$, $\|\psi\| = 1$: $\|\underbrace{(A_{pp} - E)\psi}_{(A-E)\psi}\| < \varepsilon$

Def. von $\mathcal{H}_{pp}$

$\Downarrow$

$\exists\, \gamma_n \in \mathbb{C}$, Orthonormalfolge $(\psi_n)_n$ von Eigenvektoren:

$\psi = \sum_n \gamma_n \psi_n$, $\sum_n |\gamma_n|^2 = 1$

$$\Rightarrow \|(A-E)\psi\|^2 = \|\sum_n \gamma_n (\lambda_n - E)\psi_n\|^2$$

$$= \sum_n |\gamma_n|^2 |\lambda_n - E|^2 \geq \varepsilon^2 \quad ↯$$

(iv) Ann.: $\operatorname{spec}_{ac}(A) = \operatorname{spec}(A_{ac}) =: N$ ist Leb. Nullmenge

$\Rightarrow \quad \chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A_{ac}) = 0$ sei $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$

$\Rightarrow \quad \mu_\psi(\mathbb{R}\setminus N) = \langle \psi, \underbrace{\chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A)\psi}_{\chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A_{ac})\psi} \rangle = 0 \Rightarrow \mu_\psi \perp \text{Leb.}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{ac} = \{0\} \Rightarrow \operatorname{spec}(A_{ac}) = \emptyset$

(v) analog (iv)

$\blacksquare$

1.46. Beispiele

(i) [Bsp. 1.28 (iii)] $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, $(A\varphi)(x) := x\varphi(x)$; d.h. $A = M_{\mathrm{id}}$

$x \in [0,1]$, $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow \mu_\psi(B) := \langle \psi, \chi_B(A)\psi \rangle = \int_{B\cap[0,1]} dx\, |\psi(x)|^2$$

$\forall B \subseteq \mathbb{R}$ Borel

also $\mu_\psi = \mu_{\psi, ac}$ $\quad \forall \psi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}$ d.h. $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{ac}(A) = [0,1]$

reines ac-Spektrum

"$\subseteq$" $\chi_{[0,1]}(A) = \mathbb{1}$

"$\supseteq$" Weyl-Kriterium

(ii) $\mathcal{H} = L^2([0,1]) \oplus \mathbb{C}$

$\ni \underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in L^2([0,1])$, $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\langle \underline{\Psi}_1, \underline{\Psi}_2 \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{L^2} + \overline{\gamma_1}\gamma_2$$

$\mathcal{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$\begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A\varphi \\ a\gamma \end{pmatrix}$ $\quad$ aus (i) $\quad a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{ac}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} : \varphi \in L^2([0,1]) \right\} ; \quad \operatorname{spec}_{ac}(\mathcal{A}) = [0,1]$$

$$\mathcal{H}_{pp}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} : \gamma \in \mathbb{C} \right\} ; \quad \operatorname{spec}_{pp}(\mathcal{A}) = \{a\}$$

$\mathcal{H}_{ac}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{H}_{pp}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \Rightarrow \operatorname{spec}_{sc}(\mathcal{A}) = \emptyset$

aber ac- und pp-Spektrum i.a. nicht disjunkt!

(iii) $\mathcal{H}$ separabel mit ONB $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung der rat. Zahlen in $[0,1]$

$$A := \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(j)\, \psi_j \otimes \psi_j \qquad (\Sigma \text{ kgl. stark!})$$

$$= \int_{[0,1]} P(d\lambda)\, \lambda \qquad \text{mit Spektralschar}$$

$$P(B) = \chi_B(A) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}:\\ \alpha(j)\in B}} \psi_j \otimes \psi_j \quad , \quad B \subseteq \mathbb{R} \text{ Borel}$$

da $A\psi_n = \alpha(n)\psi_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{H}_{pp} \supseteq \overline{\operatorname{span}\{\psi_n : n\in\mathbb{N}\}} = \mathcal{H} \quad \text{also } \mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}$$

und $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{pp}(A) = \overline{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = [0,1]$

M. Vorl.