1.8. Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform

Moral: Jeder selbstadj. Operator ist ein Multiplikations-operator auf L^2 über geeignetem Maßraum analog $UAU^{-1} = \mathrm{diag}(\dots)$ für Matrizen

$\boxed{\text{1.47. Definition}}$ Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$.

$$\left.\begin{array}{l}\psi \in \mathcal{H} \text{ zyklischer} \\ \text{Vektor von } A\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}\{A^n\psi : n \in \mathbb{N}_0\}}$$

$(A^0 = \mathbb{1})$

(muss es nicht immer geben — z.B. $A = \mathbb{1}$)

$\boxed{\text{1.48. Lemma}}$ Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$ und es gebe einen zyklischen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ von A. Sei $\mu_\psi := \langle \psi, \chi_\cdot(A)\psi\rangle$. Dann existiert ein unitärer Operator $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_\psi)$, so dass

$$(UAU^{-1}\varphi)(\lambda) = \lambda\,\varphi(\lambda)$$

für μ_ψ-f.a. $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ $\forall \varphi \in L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_\psi)$, d.h. $UAU^{-1} = M_{id}$
Mult.op. mit id

1.49. Bemerkung. Auch die Umkehrung gilt; vgl. Übung

Beweis. Sei $V_0 : \begin{array}{l} C(\mathrm{spec}(A)) \to \mathcal{H} \\ f \mapsto f(A)\psi \end{array}$, zykl. Vektor

- V_0 linear ✓
- V_0 isometrisch bzgl. Norm von $L^2 \equiv L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_\psi)$, da

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_\psi(\lambda) \underbrace{|f(\lambda)|^2}_{|f|^2(\lambda)} \overset{\uparrow}{=} \langle \psi, \underbrace{|f|^2(A)}_{f(A)^* f(A)} \psi \rangle$$

stetiger Funkt.kalkül

$$= \|f(A)\psi\|^2$$

Da μ reguläres Borel-Maß auf $\mathrm{spec}(A)$ $\overset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$

$C(\mathrm{spec}(A))$ dicht in L^2

$\overset{\text{Fortsetzungssatz}}{\Rightarrow}$ $\exists_1$ lineare, isometrische Fortsetzung $V: L^2 \to \mathcal{H}$

mit $V|_{C(\mathrm{spec}(A))} = V_0$.

Außerdem $\mathrm{ran}(V) \supseteq \mathrm{span}\{A^n\psi : n \in \mathbb{N}_0\}$ (da $\lambda \to \lambda^n$ stetig)

ψ zykl. $\Rightarrow \overline{\mathrm{ran}(V)} = \mathcal{H} \overset{V\text{ isometr.}}{\Longrightarrow} \mathrm{ran}(V) = \mathcal{H}$

also V unitär.

Nun ist $\forall \varphi \in C(\mathrm{spec}(A))$:

$$A(V(\varphi)) = A(\varphi(A)\psi) = (\underbrace{A\varphi(A)}_{(id\cdot\varphi)(A)})\psi = V(id\cdot\varphi)$$

$$\Rightarrow (V^{-1}AV)\varphi = id\cdot\varphi \qquad (*)$$

Dichtheit von C in L^2 und $(V^{-1}AV)$ stetig

$\Rightarrow (*)$ gilt $\forall \varphi \in L^2$ $\Rightarrow$ Beh. mit $U = V^{-1}$ ∎

Der allg. Fall (ohne Ex. zykl. Vektoren) kann auf obigen Fall reduziert werden. Es gilt:

1.50. Satz (Multiplikationsoperatorform des Spektralsatzes)

Sei $A = A^* \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$. Dann $\exists$ Maßraum $(\Lambda, \mathcal{L}, \mu)$, $\sigma : \Lambda \to \operatorname{spec}(A)$ und $U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu)$ unitär, so dass

$$(UAU^{-1}\varphi)\lambda = \sigma(\lambda)\,\varphi(\lambda)$$

für μ-f.a. $\lambda \in \Lambda$ $\quad \forall\, \varphi \in L^2(\Lambda,\mu)$, d.h. $UAU^{-1} = M_\sigma$

Führen Beweis nur für $\mathcal{H}$ separabel (der Einfachheit halber). Dieser beruht auf

1.51. Lemma Sei $\mathcal{H}$ separabel und $A = A^* \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$.

Dann $\exists$ abzählb. Familie von reduzierenden Unter-Hilbert-Räumen $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell \in L}$ (Indexmenge)

mit $\mathcal{H} = \bigoplus_{\ell \in L} \mathcal{H}_\ell$ $^{(*)}$, $A\mathcal{H}_\ell \subseteq \mathcal{H}_\ell$ und

$A_\ell := A|_{\mathcal{H}_\ell}$ besitzt zykl. Vektor $\varphi_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ $\quad \forall\, \ell \in L$

Beweis. Mittels Zornschem Lemma. Sei M die Menge aller abzählbaren Familien $\mathcal{F} = (\mathcal{H}_\ell)_\ell$ von paarw. orthog. Unter-Hilbert-Räumen mit $A\mathcal{H}_\ell \subseteq \mathcal{H}_\ell$ $\forall \ell$ und $\mathcal{H}_\ell = \overline{\operatorname{span}\{A^n\varphi_\ell : n \in \mathbb{N}_0\}}$ für ein $\varphi_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ $\forall \ell$.

- $M \neq \emptyset$, da die Familie $\mathcal{F} = \{0\} \in M$
- M teilweise geordnet: $\mathcal{F}_j := (\mathcal{H}_\ell^{(j)})_{\ell \in L_j} \in M$

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \ell \in L_1 \quad \mathcal{H}_\ell^{(1)} \in \mathcal{F}_2.$$

(*) $\forall\, \varphi \in \mathcal{H}$ $\exists_1$ Darstellung $\varphi = \sum_{\ell \in L} \varphi_\ell$ mit $\varphi_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ und $\mathcal{H}_\ell$ paarw. orthogonal.

- Sei $\mathcal{K} \subseteq M$ totalgeordnet.

<u>Beh.:</u> $\hat{\mathcal{F}} := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{K}} \mathcal{F} \in M$ ist obere Schranke von $\mathcal{K}$.

da
- klar: $\mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{K}$
- $\hat{\mathcal{H}}_j$ paarw. orthogonal $[\hat{\mathcal{F}} = (\hat{\mathcal{H}}_j)_j]$.
- $A\hat{\mathcal{H}}_j \subseteq \hat{\mathcal{H}}_j$ und $\exists$ zykl. Vektor von $A \in \hat{\mathcal{H}}_j$ $\forall \hat{\mathcal{H}}_j \in \hat{\mathcal{F}}$
- $\hat{\mathcal{F}}$ ist abzählbar (sonst $\exists$ überabz. ONS in $\mathcal{H}$ ↯)

$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ max. Element $\mathcal{F}_{max} \in M$ mit $\{0\} \in \mathcal{F}_{max}$

<u>Beh.:</u> $\mathcal{U} := \bigoplus_{\mathcal{H}_j \in \mathcal{F}_{max}} \mathcal{H}_j = \mathcal{H}$

da andernfalls $\exists\, 0 \neq \tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$ mit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{U}^\perp$

sei $\mathcal{V} := \overline{\operatorname{span}\{A^n\tilde{\varphi} : n \in \mathbb{N}_0\}} \Rightarrow A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}, \mathcal{V} \perp \mathcal{U}$

und $\tilde{\varphi}$ ist zyklisch für $A|_{\mathcal{V}}$ $\Rightarrow \mathcal{F}_{max} \subsetneq \underbrace{\mathcal{F}_{max} \cup \{\mathcal{V}\}}_{\in M}$ ↯

∎

Somit erhalten wir

$\boxed{\text{1.52. Satz}}$ Sei $\mathcal{H}$ separabel, $A = A^* \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$. Dann $\exists$ endliche Borel-Maße μ_n auf $\operatorname{spec}(A)$, $n = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $U : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\operatorname{spec}(A), \mu_n)$ unitär, so dass

$$(UAU^{-1}\varphi)_n(\lambda) = \lambda\,\varphi_n(\lambda) \qquad \text{für } \mu_n\text{-f.a. } \lambda \in \operatorname{spec}(A) \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$\forall \varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\operatorname{spec}(A), \mu_n)$.

Bew. von Satz 1.50. (für $\mathcal{H}$ separabel)

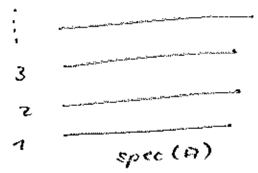
(Notation von Satz 1.52) $\forall\, n = 1, \dots, N$ wähle zyklischen Vektor $\psi_n \in \mathcal{H}_n$ (gemäß Lemma 1.51) mit $\|\psi_n\| = 2^{-n}$

$$\Rightarrow \bullet\ \mu_{\psi_n}(\operatorname{spec}(A)) = \langle \psi_n, \chi_{\operatorname{spec}(A)}(A|_{\mathcal{H}_n})\, \psi_n \rangle = 2^{-2n}$$

$\bullet\ \exists\, U_n : \mathcal{H}_n \to L^2(\operatorname{spec}(A), \mu_n)$ unitär mit

$$U_n A|_{\mathcal{H}_n} U_n^{-1} = M_{id} \longleftarrow \text{Multipl.op. mit } \lambda \quad (M_{id}\varphi)(\lambda) = \lambda \varphi(\lambda)$$

setze
$$\Lambda := \bigcup_{n=1}^{N} \left(\operatorname{spec}(A) \times \{n\}\right) \subset \mathbb{R}^2$$
$$\mathcal{L} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \cap \Lambda$$
$$\mu(\underset{\underset{\mathcal{L}}{\in}}{L}) := \sum_{n=1}^{N} \mu_n\left(\{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : (\lambda, n) \in L\}\right)$$



$$U: \quad \mathcal{H} \cong \bigoplus_{n=1}^{N} \mathcal{H}_n \longrightarrow \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\operatorname{spec}(A), \mu_n) \cong L^2(\Lambda, \mu)$$
$$\Psi \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} U_1\psi_1 \\ \vdots \\ U_N\psi_N \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} U\Psi$$

$$(U\Psi)(\lambda, n) := (U_n \psi_n)(\lambda) \quad \forall\, (\lambda, n) \in \Lambda$$

Somit
$$(UAU^{-1}\varphi)(\lambda, n) = \underset{=:\,\sigma(\lambda,n)}{\lambda}\, \varphi(\lambda, n) \qquad \mu\text{-f.a. } (\lambda, n) \in \Lambda$$

■