1.9. Spektralsatz für normale Operatoren

$\boxed{\text{1.53. Satz}}$ Sei $A \in \mathcal{BL}(\mathcal{H})$ normal, d.h. $[A, A^*] = 0$.

Dann $\exists_1$ Spektralmaß P auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ mit $P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$,
$\subseteq \mathbb{C}$

so dass $\quad A = \int\limits_{\mathrm{spec}(A)} dP(z)\; z$. Für $f: \mathrm{spec}(A) \to \mathbb{C}$

messbar u. beschränkt realisiert

$$f \longmapsto \int\limits_{\mathrm{spec}(A)} dP(z)\; f(z) =: f(A) \qquad (*)$$

den eindeutig bestimmten messbaren Funktionalkalkül.

Außerdem $\exists\, U: \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu)$ unitär, so dass

$UAU^{-1} = M_\sigma$ für ein $\sigma: \Lambda \to \mathrm{spec}(A)$
messbar.

Bew.idee. $\quad A_1 := \frac{1}{2}(A + A^*)$, $\quad A_2 := \frac{1}{2i}(A - A^*)$

$\Rightarrow A_1, A_2 \in BL(\mathcal{H})$ selbstadj. und $[A_1, A_2] = 0$
$\nwarrow$ A normal

Sei P_j das Spektralmaß von A_j $(j = 1, 2)$.

Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ist $B_1 \times i B_2 := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \in B_1, \mathrm{Im}\, z \in B_2 \}$

ein „Rechteck" in $\mathbb{C}$

Setze $P(B_1 \times i B_2) := P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$ Orthog. proj. in $\mathcal{H}$

(da P_1, P_2 komm.!)

$\overset{\text{Maßtheorie}}{\Longrightarrow}$ P lässt sich eindeutig zu Spektralmaß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

Wiederhole: • Ex. u. Eindeutigkeit des stetigen u. messb. Funktionalkalküls für A, der von (*) realisiert wird.

- $P(\operatorname{spec}(A)) = P(\mathbb{C}) = 1$
- Mult. operator form

1.54. Beispiel

Für $U \in BL(\mathcal{H})$ unitär gilt Satz 1.53 mit

$\operatorname{spec}(U) \subseteq \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, d.h. P ist

auf $\mathbb{T}$ konzentriert.

Beweis. (i) $0 \in \rho(U)$, da U bijektiv

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1 \Rightarrow \lambda \in \rho(U)$, da $\|U\| = 1$

(iii) $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda \in \rho(U)$, da

$$U - \lambda = \underbrace{U(-\lambda)}_{\text{bij.}} \underbrace{\left(U^* - \frac{1}{\lambda}\right)}_{\text{bij. nach (ii)}}$$