2. Fourier-Transformation und Distributionen

Notation: • $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet

• für $x \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ (Multi-Index) ist

- $|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$

- $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$

- $D^\alpha \equiv D_x^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$

2.1. Räume von Testfunktionen

Ziel: Topologisierung von Räumen „braver" Funktionen

2.1. Definition Schwartz-Raum

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ \varphi \in \underset{\substack{\mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \\ \text{bel. oft diff.bar}}}{C^\infty(\mathbb{R}^d)} \; : \; \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha (D^\beta \varphi)(x)| < \infty \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Big\}$$

„$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$"

$\mathbb{K}$-Vektorraum der schnell abfallenden Fkt.'en

2.2. Beispiel $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

2.3. Def. & Lemma

(a) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ ist $p_{\alpha,\beta} : \begin{array}{l} \mathcal{S} \to [0, \infty[\\ \varphi \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha (D^\beta \varphi)(x)| \end{array}$

eine (Halb)norm

(b) Die Familie von Halbnormen $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d}$

generiert mittels

$$\mathcal{U}_{\alpha,\beta,r}(\varphi) := \{\tilde{\varphi}\in\mathcal{S} : p_{\alpha,\beta}(\tilde{\varphi}-\varphi) < r\} \qquad (r>0)$$

die Umgebungs-Subbasis einer lokal-konvexen Topologie auf $\mathcal{S}$.

(c) Die lok.-konv. Top. ist Hausdorffsch und metrisierbar

Anmerkungen zum Beweis

(b), (c) vgl. Def. I.4.26 ff

- Hausdorffsch, da $\forall \varphi \overset{\neq 0}{\in} \mathcal{S} : p_{\alpha,\beta}(\varphi) \neq 0$ („separierend")
- metrisierbar, da abzählbare Fam. von Halbnormen

  ⇒ • Topologie erfüllt 1. Abzählbarkeitsaxiom

  • $d(\varphi,\psi) := \sum\limits_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \gamma_{\alpha,\beta}\, \dfrac{p_{\alpha,\beta}(\varphi-\psi)}{1+p_{\alpha,\beta}(\varphi-\psi)}$ ist Metrik

  für bel. $\gamma_{\alpha,\beta}\in\,]0,1[$ mit $\sum\limits_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d}\gamma_{\alpha,\beta}=1$

b.w.

2.6. Satz (a) $\mathcal{S}$ ist ein Fréchet-Raum, d.h. ein vollständiger, metrisierbarer, lokal-konv. Vektorraum

(b) $\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} \varphi$ in $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $p_{\alpha,\beta}(\varphi_k-\varphi) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$

Beweis. (b) aus Def. der lok.-konv. Top.

(a) aus Vollständigkeit der glm. Kgz. (vgl. Reed/Simon Thm. V.9)

2.4. Definition Sei V ein lokal-konvexes Vektorraum und $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine die Topologie erzeugende Familie von Halbnormen. V heißt vollständig $:\Longleftrightarrow$

Falls $(\varphi_k)_k \subset V$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_0 = k_0(\varepsilon, n) \ \forall k, k' \geq k_0$

$$p_n(\varphi_k - \varphi_{k'}) < \varepsilon$$

dann $\exists \varphi \in V$ mit $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$

2.5. Bemerkung

- Def 2.4. unabhängig von der Wahl der Familie von Halbnormen, welche dieselbe Topologie erzeugen
- Falls Topologie nicht 1. Abz.axiom genügt, z.B. weil überabz. Fam. von Halbnormen erforderlich, so müssen Folgen $(\varphi_k)_k$ durch Netze ersetzt werden.

2.7. Satz (a) Die Familie von Halbnormen

$$\{\tilde{p}_{j,m}\}_{j,m\in\mathbb{N}}\,,\quad \tilde{p}_{j,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big((1+|x|^2)^{j/2}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d:\\|\alpha|\le m}}|(D^\alpha\varphi)(x)|\Big)\,,$$

erzeugt dieselbe Topologie auf $\mathcal{S}$.

(b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, p\in[1,\infty]$

und ist dicht bzgl. $\|\cdot\|_p \quad \forall\, p\in[1,\infty[$.

Bew.idee.

(a) Zeige: $\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(\varphi_k)=0\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{p}_{j,m}(\varphi_k)=0\\ \forall j,m\in\mathbb{N}_0\end{array}\right.$

(genügt, da beide Top. metrisierbar)

(b) aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$

dicht $\forall\, p\in[1,\infty[$ (Satz I, 3.45)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ klar, da

$\varphi\in\mathcal{S} \in L^\infty(K) \quad \forall\, K$ kompakt

und $\lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi(x) = 0$

■

Nun zur Topologisierung von $C_c^\infty(\Omega)$.
Als Vorbereitung dafür dient die von
geeigneten Teilräumen, analog zu $\mathcal{S}$.

Zum induktiven Limes

$A \subset V \leftarrow$ Vektorraum

- konvex : $\forall x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in A \quad \forall \lambda \in [0,1]$
- absorbierend : $\forall x \in V \quad \exists \lambda \in \sigma : \quad x \in \lambda A$
- balanciert : $\forall x \in A \; \forall |\lambda| < 1 \quad \lambda x \in A$

Satz:
(a) p eine Halbnorm

$$\Rightarrow U_{p,r} := \{ \varphi \in V : p(\varphi) < r \} \text{ ist}$$

konvex, absorbierend, balanciert $\quad \forall r > 0$

(b) sei A konvex, absorbierend, balanciert

$$\Rightarrow A \supseteq U_{p_A, 1}$$

Minkowski - Funktional

$$p_A(\varphi) := \inf \{ \lambda > 0 : \varphi \in \lambda A \}$$

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \text{ komp.}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ ist offene} \\ \text{Nullumgebung in} \\ \text{indukt. Limestop. } \tau_{ie} \end{array} \right\} :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ abs., bal., konvex und} \\ \forall K \subset \Omega \text{ komp.}: A \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \text{ ist offene} \\ \text{Nullumgebung in } \mathcal{D}_K(\Omega) \end{array} \right.$$

2.8. Satz Für $K \subset \Omega$ kompakt sei

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subseteq K\}.$$

Die Familie von Halbnormen $\{p_{K,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}$,

$$\hat{p}_{K,\alpha}(\varphi) := \sup_{x \in K} |(D^\alpha \varphi)(x)|,$$

erzeugt eine vollständige metrisierbare, lokal-konvexe, Hausdorff'sche Topologie auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \iff \lim_{n\to\infty} p_{K,\alpha}(\varphi_n - \varphi) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

„glm. Kgz. aller Abl. auf K"

<u>2.9. Bemerkung</u>

$$\bigcup_{K \subset \Omega \text{ kompakt}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

(i) Die von $\{p_{K,\alpha}\}_{K \subset \Omega \text{ kompakt},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d}$ auf $C_c^\infty(\Omega)$ erzeugte lokal-konv. Topologie ist <u>metrisierbar</u> und Hausdorff'sch, aber <u>nicht vollständig</u> (siehe Rudin, S. 151)

(Ω ist durch abzählb. viele K's ausschöpfbar)

(ii) Mittels <u>induktivem Limes</u> der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt, erhält man überabz. Familie von Halbnormen(*) auf $C_c^\infty(\Omega)$, die eine <u>vollständige</u>, aber <u>nicht metrisierbare</u> lokal konv. Hausdorff-Topologie τ_{il} auf $C_c^\infty(\Omega)$ erzeugt.
Die Relativ-Top. $\tau_{il}|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist die Top. aus Satz 2.8.

(*) geg. als <u>Minkowski-Funktionale</u>

2.10. Satz Seien $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) := (C_c^\infty(\Omega), \tau_{ie})$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi \iff \begin{cases} \exists K \subset \Omega \text{ kompakt mit } \operatorname{supp} \varphi \subset K, \\ \operatorname{supp} \varphi_k \subset K \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \qquad \lim_{k\to\infty} p_{K,\alpha}(\varphi_k - \varphi) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \end{cases}$$

Beweis. Siehe z.B. Thm. V.17 in Reed/Simon ∎

2.11. Satz Sei Y ein topolog. Raum

(a) Für $f: \mathcal{S} \to Y$ gilt: f stetig $\iff$ f folgenstetig

(b) Für Y ein lokal-konv. top. Vektorraum und $f: \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linear gilt: f stetig $\iff$ f folgenstetig

Beweis. Es fehlt nur noch "$\Leftarrow$"

(a) klar, da $\mathcal{S}$ erfüllt 1. Abzählbarkeitsaxiom

(b) sei $A \subseteq Y$ offen, z.z. $f^{-1}(A)$ offen in $\mathcal{D}(\Omega)$.
es genügt dies für $A \in$ Nachbarschaftsbasis der Top. in Y zu tun. $\Rightarrow$ Ann.: A konvexe, abs. & balancierte Nullumgebung in Y (0)

$\overset{f \text{ linear}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(A)$ konvex, abs. & bal. in $\mathcal{D}(\Omega)$. (1)

Außerdem gilt $\forall K \subset \Omega$ kompakt:

$$f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ folgenstetig} \underset{1.\text{Abz.axiom}}{\overset{\mathcal{D}_K(\Omega) \text{ hat}}{\Longrightarrow}} f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \left(f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}(A) \qquad (2)$$

offene Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$
wegen (0)

$$(1) \wedge (2) \overset{\text{Def. S.58R}}{\Longrightarrow} f^{-1}(A) \text{ offene Nullumg. in } \tau_{ie} \quad ∎$$