2.2. Die Fourier-Trafo auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Wozu gut? Algebraisierung von Differentiation und Faltung!

2.12. Definition Für $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ sei $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j$ das Euklid. Standard-Skalarprodukt und für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$\hat{\varphi}(\xi) \equiv (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \; e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x)$$

wohldef. (vgl. Satz 2.7(b)).

„Fourier-Integral"

[Warnung: verschiedene Konv. in Literatur!]

2.13. Satz (Rechenregeln für $\mathcal{F}$) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$

(a) $(D^\alpha \hat{\varphi})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \, \widehat{(x^\alpha \varphi)}(\xi)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

(b) $\widehat{(D^\alpha \varphi)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$

(c) für $y \in \mathbb{R}^d$ sei $\tau_y : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto \varphi(\cdot - y)$

es gilt $\widehat{(\tau_y \varphi)}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi} \hat{\varphi}(\xi)$

(d) $\widehat{(e^{iy\cdot x} \varphi)}(\xi) = (\tau_y \hat{\varphi})(\xi) = \hat{\varphi}(\xi - y)$

(e) für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $\sigma_\lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto \varphi(\lambda \cdot)$.

es gilt $\widehat{(\sigma_\lambda \varphi)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} (\sigma_{1/\lambda} \hat{\varphi})(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \hat{\varphi}(\xi/\lambda)$

(f) für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ ist $\varphi * \psi := \int_{\mathbb{R}^d} dx \; \varphi(x) \, \psi(\cdot - x) \in \mathcal{S}$

und es gilt $\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{d/2} \, \hat{\varphi} \, \hat{\psi}$

(g) $\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-d/2} \; \hat{\varphi} * \hat{\psi}$

Beweis.

NB: Das Fourier-Integral kgl. glm. in $\xi \in \mathbb{R}^d$! (*)

$\Rightarrow$ Vertauschung von D_ξ^α mit $\int$ erlaubt.

(a) $$(D_\xi^\alpha \hat{\varphi})(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \; \underbrace{\left(D_\xi^\alpha e^{-i\xi \cdot x}\right)}_{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha} \varphi(x)$$

(b) Da $D^\alpha \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

darf man partiell integrieren

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \; e^{-i\xi \cdot x} (D_x^\alpha \varphi)(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} dx \; \underbrace{\left(D_x^\alpha e^{-i\xi \cdot x}\right)}_{(-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha e^{-i\xi \cdot x}} \varphi(x)$$

(c), (d), (e) Übung, klar (!)

(f) Übung

(g) später

(*) $$\frac{1}{|\xi - \xi'|} \left|\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi')\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \; \underbrace{\frac{\left|1 - e^{i(\xi - \xi') \cdot x}\right|}{|\xi - \xi'|}}_{\leq |x| + c_{|\xi - \xi'|} x^2 \text{ mit } c_a \xrightarrow{a \to 0} 0} \varphi(x)$$ (höhere Abl. analog)

$\boxed{\text{2.14 Satz}}$ $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist linear und stetig

Beweis

- sei $\varphi \in \mathcal{S}$, zeige $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$.
  - Satz 2.13 (a) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
  - $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow$

$$i^{|\beta|} \xi^\beta (D^\alpha \hat{\varphi})(\xi) = i^{|\beta|} (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha \varphi)}(\xi)\, \xi^\beta$$

$$= (-i)^{|\alpha|} \widehat{(\underbrace{D^\beta (x^\alpha \varphi)}_{\psi \in \mathcal{S}})}(\xi)$$

$$\Rightarrow p_{\beta,\alpha}(\hat{\varphi}) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(\xi)| \leq \|\psi\|_{L^1} < \infty$$

- linear klar
- zeige Folgenstetigkeit in $\hat{\varphi} = 0$ (Beachte Satz 2.7(a))

sei $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}$ mit $\tilde{p}_{j,m}(\varphi_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \forall\, j, m \in \mathbb{N}_0$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow p_{\beta,\alpha}(\hat{\varphi}_k) \leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \; |D^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} dx \, \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{d+1}{2}}} \right) \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (1+x^2)^{\frac{d+1}{2}} D^\beta (x^\alpha \varphi_k(x)) \right|}_{\leq \text{const } \tilde{p}_{j,|\beta|}(\varphi_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0}$$

2.15. Lemma (Parseval-Formel)

$$\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{S}: \quad \int_{\mathbb{R}^d} dx\; \phi(x)\, \hat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\; \hat{\phi}(x)\, \psi(x)$$

Beweis. Fubini

2.16. Satz (Fourierscher Integralsatz für $\mathcal{S}$)

$\forall\, \varphi \in \mathcal{S} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi\; e^{i x \cdot \xi}\, \hat{\varphi}(\xi) \qquad (*)$$

„Fourier-Umkehrintegral"

Beweis

Strategie:
- Regularisierung des Umkehrintegrals mit $e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^2}$
- Parseval Formel
- approx. δ-Fkt.

Sei $\Phi(x) :=$ rechte Seite von $(*)$

Major. Konv. $\Rightarrow$ $$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi\; e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^2} \underbrace{e^{i x \cdot \xi}\, \hat{\varphi}(\xi)}_{\widehat{(\tau_{-x}\varphi)}(\xi)}$$

Übungsaufg. $\psi(x) := e^{-\varepsilon x^2/2}$ $\Rightarrow$

$$\hat{\psi}(\xi) = \varepsilon^{-d/2}\, e^{-\xi^2/2\varepsilon}$$

Parseval $\Rightarrow$ $$\Phi(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\varepsilon^{-d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi\; e^{-\xi^2/2\varepsilon}\, \varphi(\xi + x)$$

$y = \xi/\varepsilon$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} dy \, \frac{e^{-y^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} \underbrace{\varphi(x + \varepsilon y)}_{|\cdot| \leq \|\varphi\|_\infty}$$

$$\overset{\text{maj. Kgz.}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dy \, \frac{e^{-y^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}}_{1} \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi(x + \varepsilon y)}_{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

$\boxed{\text{2.17. Definition}}$ Die Abbildung $\mathcal{F}^*: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto \check{\varphi}$

$$\check{\varphi}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, e^{i x \cdot \xi} \varphi(\xi)$$

heißt inverse Fourier-Transformation

$\boxed{\text{2.18. Korollar}}$ $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist bijektiv mit

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*, \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \check{\hat{\varphi}} = \hat{\check{\varphi}}.$$

$\boxed{\text{2.19. Satz}}$ (Parseval-Gleichung)

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \overline{\varphi(x)} \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, \overline{\hat{\varphi}(\xi)} \hat{\psi}(\xi) = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle$$

Beweis. Parseval-Formel mit ϕ und ψ, wobei

$$\phi := \overline{\hat{\varphi}} = \check{\overline{\varphi}} \Rightarrow \hat{\phi} = \overline{\varphi}.$$