2.3. Die Fourier-Trafo auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und $L^1(\mathbb{R}^d)$

2.20. Satz $\exists_1$ unitärer linearer Operator $\mathcal{F}_2$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathcal{F}_2\big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2^{-1}\big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$

$\mathcal{F}_2$ heißt *L^2-Fourier-Trafo* (= *Fourier-Plancherel-Trafo*)

Die Parseval-Gleichung gilt $\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. $\mathcal{F}$ linear, isometrisch auf $\mathcal{S}$ u. $\mathcal{S}$ dicht in L^2 bzgl. $\|\cdot\|_2$

$\Rightarrow$ $\exists_1$ isometrische lineare Fortsetzung $\mathcal{F}_2$ auf L^2, analog bezeichne $\mathcal{F}_2^{-1}$ die eind. isometrische lineare Forts. von $\mathcal{F}^{-1}$ auf L^2 und es gilt $\forall \psi \in L^2$:

$$\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2\psi \underset{\substack{(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S} \\ \|\psi - \varphi_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \\ \text{und } \mathcal{F}_2,\, \mathcal{F}_2^{-1} \text{ stetig}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_2^{-1} \underbrace{\underbrace{\mathcal{F}_2 \varphi_k}_{\mathcal{F}\varphi_k}}_{\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi_k}_{\varphi_k}} = \psi \underset{\text{analog}}{=} \mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}\psi$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2 = \mathbb{1} = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}$ (Notation $\mathcal{F}_2^{-1}$ gerechtfertigt!)

d.h. $\mathcal{F}_2$ unitär

Parseval auf L^2 aus Satz 2.19. und Approx., wie oben.

2.21. Bemerkung

(i) Parseval Glg. $\Rightarrow$ $\langle \varphi, \underbrace{\mathcal{F}_2^*}_{\text{adj. zu } \mathcal{F}_2}\mathcal{F}_2\psi \rangle \overset{!}{=} \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$

d.h. $\mathcal{F}_2^* = \mathcal{F}_2^{-1}$ und die Notation $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ auf $\mathcal{S}$ macht Sinn!

(ii) $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|^{3/4}} \end{array} \in L^2(\mathbb{R})$

aber $\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-i\xi x} f(x)$ existiert für kein $\xi \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ Frage: wie wirkt $\mathcal{F}_2$? Antwort: Integral abschneiden

$\boxed{2.22.\ \text{Satz}}$ (Plancherel)

$\forall\ k > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

ist $\overset{(\vee)}{\widehat{f}}_k(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int_{B_k(0)} dx\, e^{\overset{(+)}{-} i \xi \cdot x} f(x)$

$\uparrow$ Ball um 0 in $\mathbb{R}^d$ mit Radius k

wohldef. und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \| \overset{(\vee)}{\widehat{f}}_k - \mathcal{F}_2^{(-1)} f \|_2 = 0$$

Beweis nur für $\widehat{f}_k$ (für $\check{f}_k$ analog!)

Sei $g_k := f \chi_{B_k(0)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

$|f - g_k|^2 \leq |f|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dom. Kgz.}}{\Rightarrow} \lim_{k \to \infty} \|f - g_k\|_2 = 0$

Somit $\| \mathcal{F}_2 g_k - \mathcal{F}_2 f \|_2 = \| \mathcal{F}_2 (g_k - f) \|_2 \underset{\text{Isometrie}}{=} \| g_k - f \|_2 \overset{k \to \infty}{\to} 0$

und Beh. folgt aus

$$\mathcal{F}_2 g_k = \widehat{f}_k \qquad (*)$$

Bew. von (*): $\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \forall \psi \in L^2$ gilt

$$\langle \varphi, \mathcal{F}_2 \psi \rangle = \langle \mathcal{F}^* \varphi, \psi \rangle$$

setze $\psi = g_n$

$$\Rightarrow \quad \langle \varphi, \mathcal{F}_2 g_n \rangle = (2\pi)^{-d/2} \int_{B_n(0)} dy \, \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} dx \, e^{+iy\cdot x} \varphi(x) \right)} \, f(y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \overline{\varphi(x)} \underbrace{\int_{B_n(0)} dy \, e^{-iy\cdot x} f(y)}_{\hat{f}_n(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \overline{\varphi(x)} \left[(\mathcal{F}_2 g_n)(x) - \hat{f}_n(x) \right] = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

$$\overset{\text{nächster Satz}}{\Rightarrow} \quad \mathcal{F}_2 g_n(x) = \hat{f}_n(x) \quad \text{für Leb. f.a. } x \in \mathbb{R}^d$$

$\blacksquare$

2.23. Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega) := \{ g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $g \chi_K \in L^1(\Omega)$ $\forall K \subset \Omega$ kompakt $\}$

Falls

$$\int_\Omega dx \, \varphi(x) f(x) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{für Leb. f.a. } x \in \Omega.$$

Beweis. mit Darstellungssatz von Riesz für komplexes Maß $\mu := \int dx \, f(x)$ auf $K \subset \Omega$ (komp)

Details: Übung

2.24. Definition

- Fourier-Trafo auf $L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \longmapsto \mathcal{F}_1\varphi := \hat{\varphi} ,$$

wobei

$\hat{\varphi}(\xi)$ durch 2.12 wohldef. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ und es gilt

$$\|\hat{\varphi}\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|\varphi\|_1 \qquad (1)$$

- $C_0(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0 \}$

ist Banach-Raum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

2.25. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma)

$$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d) \quad \text{ist linear u. stetig.}$$

Beweis.

Klar $\mathcal{F} : \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1\right) \to \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right) \subset \left(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$

ist linear und stetig wegen (1).

Satz über beschr. lin. Forts.

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$

$\Rightarrow \exists_1$ stetige lineare Fortsetzung $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$,

die (1) erfüllt $\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$

2.26. Bemerkung

(i) Jedes $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ist sogar glm. stetig.

Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ folgt glm. Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ auch direkt aus (1).

(ii) Es gilt keine Parseval-Glg für $\mathcal{F}_1$, wohl aber die Parseval-Formel

(iii) Für $\mathcal{F}_1$ gilt Satz 2.13 (c) – (f);
(a), (b), (g) gelten nur unter Zusatzvoraussetzungen

(iv) $\mathcal{F}_1$ in Satz 2.25 ist nicht surjektiv[⊗]

$\boxed{\text{2.27. Satz}}$ (Fourierscher Integralsatz für L^1)

Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und für $\varepsilon > 0$ sei

$$\varphi_\varepsilon(x) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi\, e^{ix\cdot\xi}\, e^{-\varepsilon\xi^2/2}\, \hat{\varphi}(\xi).$$

Dann gilt: (i) $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_1 = 0$ und

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$ für Leb. f.a. $x \in \mathbb{R}^d$

Beweisidee

Analog zu Satz 2.16 auf $\mathcal{S}$. Im 3. Schritt verwende für (i) Lemma I.3.48, für (ii) ein analoges f.ü. Resultat (komplizierter!)

⊗ siehe z.B. Kolmogorov/Fomin, Elements of the theory of functions, Graylock Press, 1957, Sect. VIII.4.7.