2.4. Distributionen und Sobolev-Räume

<u>Ziel</u>: Verallgemeinerung des Funktionenbegriffs

Nützlich für: - Ableitung nicht diff.barer Fkt'en

- Lsg'en von (partiellen) Diff.glg'en

2.28. Definition $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet

(i) Raum der *Distributionen* (über Ω)

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{ T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ linear, stetig} \}$$

$\uparrow$ top. Dualraum $(= \mathcal{D}(\Omega)^*)$

(ii) Raum der *temperierten Distributionen* (über $\mathbb{R}^d$)

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} \text{ linear, stetig} \}$$

2.29. Lemma Sei $X = \mathcal{D}(\Omega)$ oder $X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Dann gilt für $T : X \to \mathbb{C}$ linear

$$T \in X' \iff \left\{ \begin{array}{ll} \forall\, (\varphi_k)_k \subset X \text{ mit } \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0 & (\text{in } X) \\ \lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0\,. & (\text{in } \mathbb{C}) \end{array} \right.$$

Beweis. Da T linear & Satz 2.11 $\blacksquare$

2.30. Lemma

Sei $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ linear.

Dann gilt:

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \iff \begin{cases} \exists\, j, m \in \mathbb{N}_0\ \exists\, C > 0, \text{ so dass} \\ |T(\varphi)| \leq C\, \tilde{p}_{j,m}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Beweis

"$\Leftarrow$" Lemma 2.29, da $\varphi_k \xrightarrow{k\to 0} 0$ in $\mathcal{S} \Rightarrow \tilde{p}_{j,m}(\varphi_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

"$\Rightarrow$" Ann.: $T \in \mathcal{S}'$ und $\forall\, k \in \mathbb{N}_0\ \exists\, \varphi_k \in \mathcal{S}$

$$|T(\varphi_k)| > k\, \tilde{p}_{k,k}(\varphi_k)$$

(ginge nicht für $p_{\alpha,\beta}$!)

$$\psi_k := \varphi_k / |T(\varphi_k)| \Rightarrow \frac{1}{k} > \tilde{p}_{k,k}(\psi_k) \geq \tilde{p}_{j,m}(\psi_k)$$

$$\forall\, j, m \leq k$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \tilde{p}_{j,m}(\psi_k) = 0 \quad \forall\, j, m \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \psi_k \xrightarrow{k\to 0} 0 \text{ in } \mathcal{S} \overset{\text{stetig}}{\Rightarrow} T(\psi_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{↯ da } |T(\psi_k)| = 1\ \forall k$$

∎

2.31. Lemma

Sei $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann gilt:

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \begin{cases} \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt } \exists\, C > 0,\ m \in \mathbb{N}_0 : \\ |T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \hat{p}_{K,\alpha}(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \end{cases}$$

Beweis. Analog zu Lemma 2.30 ∎

2.32. Satz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (injektive Einbettung)

im Sinne, dass für $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ gilt: $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
und für $T \neq S$ auch $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \neq S|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$

Beweis Sei $i: \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ die kanonische Einbettung,

so ist $T|_{\mathcal{D}} = T \circ i$

Bem.: i ist stetig, da $\forall K \subset \Omega$ kompakt gilt für bel.

$\varphi \in \mathcal{D}_K$: $\quad \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq \sup_{x \in K} |x^\alpha| \; \hat{p}_{K,\beta}(\varphi)$

$\Rightarrow i$ folgenstetig auf $\mathcal{D}_K \; \forall K \underset{\text{Satz 2.11}}{\overset{\text{linear}}{\Rightarrow}}$ stetig.

Also $T|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Injektivität: sei $T \neq S \in \mathcal{S}' \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{S}'$, so dass

$T(\varphi) \neq S(\varphi)$

Da $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{S}$ (siehe unten) $\Rightarrow \exists (\varphi_n)_n \subset \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$

mit $\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathcal{S}$

T stetig $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(\varphi_n)$

$\Rightarrow \exists \tilde{n}: T(\varphi_{\tilde{n}}) \neq S(\varphi_{\tilde{n}}) \Rightarrow T|_{\mathcal{D}} \neq S|_{\mathcal{D}}$

zur Dichtheit von $\mathcal{D}$ in $\mathcal{S}$: sei $\psi \in \mathcal{S}$, sei

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f(x) = 1 \;\; \forall |x| \leq 1$; $f_n := f(\frac{1}{n}\,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \quad f_n \psi \in \mathcal{D}$ und $f_n \psi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi$ in $\mathcal{S}$

da $\lim_{n\to\infty} \rho_{\alpha,\beta}(\psi(1 - f_n)) = 0$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$\blacksquare$

2.33. Bemerkung Man topologisiert $X' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit der schwach-*-Topologie, die von der Fam. von Halbnormen $\{T \mapsto |T(\varphi)|\}_{\varphi \in X}$ erzeugt wird.

Für $(T_n)_n \subset X'$, $T \in X'$ gilt, wie üblich,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \text{ in } X' \iff \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in X$$

2.34. Beispiele

(i) Sei $K \subset \Omega$ kompakt und $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (kompl. Borel-Maß)

$$\Rightarrow \quad T_\mu : \varphi \mapsto \int_K d\mu(x)\, \varphi(x) \qquad \left(\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right)$$

liegt in $\mathcal{D}'(\Omega)$

(ii) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$$\Rightarrow \quad T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} dx\, f(x)\, \varphi(x) \qquad \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

„reguläre Distribution"

Warnung: i.a. $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

(iii) • Dirac-Distribution zu $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad \delta_x : \varphi \mapsto \varphi(x) \quad \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

(auch Spezialfall von (i)!)

• $\delta_x^{(\alpha)} : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(x) \quad \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

2.35. Definition Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

(i) Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißt

$$D^\alpha T := (-1)^{|\alpha|} T \circ D^\alpha$$

distributionelle (α-) Ableitung von T

(ii) Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $Y \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat eine schwache} \\ (\alpha\text{-}) \text{ Ableitung (in } Y) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, g \in Y : \\ D^\alpha T_f = T_g \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{array}\right.$$

Notation: $g = D^\alpha f$

17. Vorl.

2.36 Bemerkung (i) Falls die schwache Ableitung existiert, so ist sie eindeutig (wende Satz 2.23 an)

(ii) Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega) \cap C^{|\alpha|}(\Omega)$. Dann gilt $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$(D^\alpha T_f)(\varphi) = \int_\Omega dx\, f(x)\, (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(x) \underset{\text{part. Integr.}}{=} \int_\Omega dx\, (D^\alpha f)(x)\, \varphi(x)$$

$$= T_{D^\alpha f}(\varphi)$$

$\Rightarrow$ schwache Ableitung stimmt mit gewöhnlicher überein, falls letztere existiert!

2.37. Beispiel sei $x \in \mathbb{R}^d$

(i) $(D^\alpha \delta_x)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_x(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\Rightarrow \quad D^\alpha \delta_x = \delta_x^{(\alpha)}$$

(ii) $f(x) := \ln|x|$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathcal{D}T_f(\varphi) = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \,\ln|x|\, \varphi'(x)}_{\int_{-\infty}^{0}\dots + \int_{0}^{+\infty}\dots}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0}\Big[\underbrace{-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx\,(\ln(-x))\varphi'(x)}_{-\ln(-x)\,\varphi(x)\big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x)} \;\; \underbrace{-\int_{\varepsilon}^{\infty} dx\,\ln x\,\varphi'(x)}_{-\ln x\,\varphi(x)\big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x)}\Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0}\Big[\underbrace{(\ln\varepsilon)\big(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\big)}_{\sim\,\varepsilon\ln\varepsilon\;\varphi'(0)\;\overset{\varepsilon\to 0}{\to}\;0} + \dots\Big]$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x) =: PV\int_{\mathbb{R}} dx\,\frac{1}{x}\varphi(x)$$

Also "$\mathcal{D}\ln|x| = PV\frac{1}{x}$"

(iii) $f(x) = \Theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(\mathcal{D}T_f)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} dx\,\Theta(x)\,\varphi'(x) = -\int_0^\infty dx\,\varphi'(x)$$

$$= \varphi(0) = \delta_0(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}T_\Theta = \delta_0$$

2.38. Definition Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$\mathcal{F}'T := T \circ \mathcal{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ heißt Fourier-Transformierte von T

da $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig

also $(\mathcal{F}'T)(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

analog: $\mathcal{F}'^{*}T := T \circ \mathcal{F}^{*}$

2.39. Beispiele

(i) sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\mathcal{F}'T_\psi)(\varphi) = T_\psi(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, \psi(x)\, \hat{\varphi}(x) \underset{\text{Parseval-Formel}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} dx\, \hat{\psi}(x)\, \varphi(x)$$

$$= T_{\hat{\psi}}(\varphi)$$

also $\mathcal{F}'T_\psi = T_{\hat{\psi}}$ (kompatibel!)

(ii) $$(\mathcal{F}'T_{e^{ix\cdot}})(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi\, e^{ix\cdot\xi}\, \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{d/2}\, \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}'T_{e^{ix\cdot}} = (2\pi)^{d/2}\, \delta_x$$

Beachte: $f(\xi) := e^{+ix\cdot\xi}$ erfüllt $(1+|\xi|^2)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^d) \ \forall s < -d/2$

2.40. Satz $\mathcal{F}': \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

ist linear, schwach-*-stetig und bijektiv mit

$$\mathcal{F}'^{-1} = \mathcal{F}'^{*}$$

Beweis
• linear: $\left(\mathcal{F}'(\alpha T + \beta S)\right)(\varphi) = (\alpha T + \beta S)(\hat{\varphi}) = \alpha T(\hat{\varphi}) + \beta S(\hat{\varphi})$
$= \alpha (\mathcal{F}'T)(\varphi) + \beta (\mathcal{F}'S)(\varphi)$

• stetig: (schwach-*-Top. siehe Bem. 2.33)

sei $U \in$ Umgebungsbasis von $T = 0$ in $\mathcal{S}'$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ und $r_1, \dots, r_n > 0$: $U = \{T \in \mathcal{S}' : |T(\varphi_j)| < r_j$ für $j = 1, \dots, n\}$

Für $T = \mathcal{F}'S$ gilt $(\mathcal{F}'S)(\varphi_j) = S(\hat{\varphi}_j)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}'^{-1}(U) = \{ S \in \mathcal{S}' : |S(\check{\varphi}_j)| < r_j$ für $j = 1, \dots, n\}$

Urbild — schwach-*-offen in $\mathcal{S}'$

• bijektiv:

$$\left(\mathcal{F}'^{*}\mathcal{F}'T\right)(\varphi) = (\mathcal{F}'T)(\mathcal{F}^{*}\varphi) = T\big(\underbrace{\mathcal{F}\mathcal{F}^{*}\varphi}_{\varphi}\big) = T(\varphi)$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}'^{*}\mathcal{F}' = \mathbb{1}$ auf $\mathcal{S}'$ $\qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$

$= \mathcal{F}'\mathcal{F}'^{*}$ (analog)

∎

Folgende Räume spielen eine zentrale Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

$\boxed{\text{2.41. Definition}}$ (Sobolev-Räume) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}_0$

$$H^{m,p}_{(loc)}(\Omega) := \{ f \in L^p_{(loc)}(\Omega) : D^\alpha f \in L^p_{(loc)}(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \le m \}$$

schwach

$$H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$$

$\boxed{\text{2.42. Satz}}$ $H^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banach-Raum bzgl.

der Norm $\quad \|f\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$,

$H^m(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f,g\rangle_m := \sum_{|\alpha|\le m} \underbrace{\langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle}_{\int_\Omega dx\, \overline{(D^\alpha f)(x)}\,(D^\alpha g)(x)}$$

Beweis Sei $(f_k)_k \subset H^{m,p}$ Cauchy $\Rightarrow (D^\alpha f_k)_k \subset L^p$ ist

Cauchy $\forall\, |\alpha|\le m \underset{\substack{\uparrow\\ L^p \text{ vollst.}}}{\Rightarrow} \exists\, g_\alpha \in L^p : \|D^\alpha f_k - g_\alpha\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$\forall\, |\alpha|\le m$

zeige $g_\alpha = D^\alpha g_0$ (schwach) :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \quad \int_\Omega dx\, f_k(x)(D^\alpha\varphi)(x) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\,(D^\alpha f_k)(x)\,\varphi(x)$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\, g_\alpha(x)\varphi(x) + \underbrace{(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\, \varphi(x)\left[D^\alpha f_k(x) - g_\alpha(x)\right]}_{=:\, I_k}$$

$$\Rightarrow |I_k| \overset{\text{Hölder}}{\le} \|D^\alpha f_k - g_\alpha\|_p \underbrace{\|\varphi\|_q}_{<\infty} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_\Omega dx\, f_k(x)(D^\alpha\varphi)(x)}_{} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\, g_\alpha(x)\,\varphi(x)$$

$$\int_\Omega dx\, g_0(x)(D^\alpha\varphi)(x) + \underbrace{\int_\Omega dx\,[f_k(x) - g_0(x)](D^\alpha\varphi)(x)}_{J_k}$$

mit $|J_k| \le \|f_k - g_0\|_p \underline{\|D^\alpha\varphi\|_q} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

2.43. Satz (Lemma von Sobolev)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, seien $m, k \in \mathbb{N}_0$, $p > 1$ mit $k < m - d/p$. Dann gilt:

$\forall f \in H^{m,p}(\Omega) \quad \exists \; \varphi_f \in C^k(\Omega)$ mit

$$f = \varphi_f \quad \text{f.ü. auf } \Omega.$$

(d.h. die Äquiv.klasse f hat einen Vertreter in C^k)

Beweis. Siehe z.B. Werner, Funktionalanalysis Satz V.2.12 (nur $p=2$) oder R. Adams, Sobolev spaces

Charakterisierung von $H^m(\mathbb{R}^d)$ ohne Ableitung:

2.44. Satz Sei $m \in \mathbb{N}_0$.

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |\cdot|^2)^{m/2} \mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

Die Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{m,2}$ und die für $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ geg. Norm $|||f|||_m := \|(1+|\cdot|^2)^{m/2} \mathcal{F}_2 f\|_2$ sind äquivalent.

Beruht auf Algebraisierung der schwachen Ableitung durch Fourier-Trafo analog zu Satz 2.13 (b)

2.45. Lemma Sei $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$[\mathcal{F}_2 (\underbrace{D^\alpha f}_{\text{(schwach)}})](\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}_2 f)(\xi) \quad \text{für Leb.-f.a. } \xi \in \mathbb{R}^d \quad \forall |\alpha| \leq m$$