3.2. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

3.13. Definition Sei A dicht def., lin. Operator in $\mathcal{H}$.

(i) A symmetrisch ($\equiv$ Hermitesch) $:\Leftrightarrow$ $A \subseteq A^*$

(ii) A selbstadjungiert $:\Leftrightarrow$ $A = A^*$

3.14. Bemerkung

- (i) $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi, \psi \in \operatorname{dom}(A)$ gilt $\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$
- (ii) $\Leftrightarrow$ A symmetrisch und $\operatorname{dom}(A^*) = \operatorname{dom}(A)$

  d.h. $\{\psi \in \mathcal{H} : \exists\, \eta = \eta_\psi \in \mathcal{H}$ mit $\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \operatorname{dom}(A)\} = \operatorname{dom}(A)$

  (und nicht größer!)

- A symm. $\overset{\text{Satz 3.9(ii)}}{\Rightarrow}$ A abschließbar, da $\operatorname{dom}(A^*) \supseteq \underset{\text{dicht}}{\operatorname{dom}(A)}$

  und es gilt $\boxed{A \subseteq \underset{=\overline{A}}{A^{**}} \subseteq \underset{\text{abgeschl. (Satz 3.9.(i))}}{A^*}}$

  Falls A zudem abgeschl. $\Rightarrow$ $A = A^{**} \subseteq A^*$

- A selbstadj. $\Leftrightarrow$ A symm. & abgeschl. und $A = A^{**} = A^*$

20. Vorl.

3.15. Beispiele [vgl. Bsp. 3.3]

(i) Multipl.op. Q auf $L^2(\mathbb{R})$ (■)

$(Q\psi)(x) := x\psi(x)$ mit $\mathrm{dom}(Q) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} dx\, x^2 |\psi(x)|^2 < \infty\}$

Beh.: $Q = Q^*$ selbstadj. Bew.: $\forall \psi \in \mathrm{dom}(Q)$ $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi, Q\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\, \overline{\varphi(x)}\; x\psi(x) = \int dx\, \overline{x\varphi(x)}\; \psi(x)$$

$$\stackrel{!}{=} \langle \eta, \psi \rangle \quad \text{mit } \eta \in L^2(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $\eta(x) = x\varphi(x)$ also

$\langle \varphi, Q\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{dom}(Q)$

(ii)

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ $\mathrm{dom}(\mathcal{D}_{min}) = C_c^\infty(\mathbb{R}) \ni \psi \mapsto i\psi'$

Beh.: $\mathcal{D}_{min}^* = \mathcal{D}_{max}$ $\mathrm{dom}(\mathcal{D}_{max}) = H^1(\mathbb{R}) \ni \psi \mapsto i\psi'$

also $\mathcal{D}_{min}$ symm., da $\mathcal{D}_{max} \supseteq \mathcal{D}_{min}$

Bew.: $\forall \psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{D}_{min})^{(■)}$ $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi, \mathcal{D}_{min}\psi \rangle = \langle \varphi, i\psi' \rangle = -\langle i\varphi, \psi' \rangle \stackrel{!}{=} \langle \eta, \psi \rangle$$

für ein $\eta \in L^2(\mathbb{R})$

$\stackrel{\text{per def. schw. Abl.}}{\Leftrightarrow}$ $i\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ und $\eta = i\varphi'$ ← schwache

$\Rightarrow$ $\mathrm{dom}(\mathcal{D}_{min}^*) = H^1(\mathbb{R})$ und $\mathcal{D}_{min}^*\varphi = i\varphi'$ ✓

insbesondere: $\mathcal{D}_{max} = \mathcal{D}_{min}^*$ ist abgeschl. [vgl. Übungsaufg.!]
(Satz 3.9(i)$^{(■)}$)

(■) NB: $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{dom}(Q), \mathrm{dom}(\mathcal{D}_{min})$ $\Rightarrow$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$

3.16. Definition Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch

- A wesentlich selbstadj. $:\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ selbstadj. (d.h. $A^{**} = A^*$)

- Sei A abgeschlossen. $\mathcal{D} \subset \mathrm{dom}(A)$ heißt determinierender Bereich („core") zu A

  $$:\Leftrightarrow \quad \overline{A|_{\mathcal{D}}} = A$$

3.17. Bemerkung

(i) A wesentl. selbstadj. $\Leftrightarrow$ $\exists_1$ selbstadj. Erweiterung zu A

(Übung!)

(ii) Falls A wesentlich selbstadj., so bestimmt A bereits eindeutig seine selbstadj. Erweiterung $\overline{A}$, d.h. Kenntnis von $\mathrm{dom}(\overline{A})$ ist u.U. gar nicht nötig (zum Glück!)

(iii) A selbstadj. und $\mathcal{D}$ ein core für A
$\Rightarrow$ $A|_{\mathcal{D}}$ ist wesentlich selbstadj.

Kriterien für Selbstadjungiertheit:

3.18. Satz Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(i) $A = A^*$

(ii) A abgeschlossen und $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$A = A^* \Rightarrow A = A^{**} = \bar{A}$ also abgeschlossen.

Sei $\varphi \in \mathrm{dom}(A^*)$ mit $A^*\varphi = i\varphi$ (Fall $A^*\varphi = -i\varphi$ analog!)

$\overset{A^*=A}{\Rightarrow} A\varphi = i\varphi$

und $-i\langle\varphi,\varphi\rangle = \langle i\varphi,\varphi\rangle = \langle A\varphi,\varphi\rangle = \langle \varphi, \underbrace{A^*\varphi}_{i\varphi}\rangle = i\langle\varphi,\varphi\rangle$

$\Rightarrow \|\varphi\| = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 1. Akt: $\ker(A^* \pm i) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{ran}(A\mp i)$ dicht in $\mathcal{H}$

denn sei $\psi \in \{\mathrm{ran}(A\mp i)\}^\perp \Leftrightarrow \langle (A\mp i)\varphi, \psi\rangle = 0 \quad \forall \varphi\in \mathrm{dom}(A)$

$= \langle \varphi, 0\rangle$

$\Leftrightarrow 0 = (A^*\pm i)\psi$ ✓

2. Akt: Abgeschlossenheit von $\mathrm{ran}(A\mp i)$ (o.E. nur für "$-$")

$\forall \varphi \in \mathrm{dom}(A) : \|(A-i)\varphi\|^2 = \langle (A-i)\varphi, (A-i)\varphi\rangle$

$= \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 \; i\big(\underbrace{\langle\varphi,A\varphi\rangle - \langle A\varphi,\varphi\rangle}_{0}\big)$ A symm.

$\geq \|\varphi\|^2$ (*)

$\Rightarrow (A-i)^{-1} : \mathrm{ran}(A-i) \to \mathrm{dom}(A)$ stetig

Sei $(\varphi_n)_n \subset \mathrm{dom}(A)$ mit $(A-i)\varphi_n \to \eta \in \overline{\mathrm{ran}(A-i)}$

$\Rightarrow ((A-i)\varphi_n)_n$ ist Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow} (\varphi_n)_n$ ist Cauchy

$\Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{H}$ mit $\varphi_n \to \psi \Rightarrow A\varphi_n \to \eta + i\psi$

$\overset{A \text{ abgeschl.}}{\Rightarrow} \psi \in \mathrm{dom}(A)$ und $A\psi = \eta + i\psi \Rightarrow \eta \in \mathrm{ran}(A-i)$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

sei $\varphi \in \mathrm{dom}(A^*)$, n.V. $\exists \psi \in \mathrm{dom}(A) : (A^*-i)\varphi = (A-i)\psi$

$\overset{A^* \supseteq A}{\Rightarrow} (A^*-i)(\varphi-\psi) = 0 \Rightarrow \forall \eta \in \mathrm{dom}(A)$:

$0 = \langle \eta, (A^*-i)(\varphi-\psi)\rangle = \langle \underbrace{(A+i)\eta}_{\text{durchläuft ganz } \mathcal{H} \text{ n.V.}}, \varphi-\psi\rangle \Rightarrow \varphi = \psi \Rightarrow A^* = A$

3.19. Korollar Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symm.

Dann sind äquivalent:

(i) A ist wesentlich selbstadj.

(ii) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{ran}(A \pm i)$ dicht in $\mathcal{H}$

Beweis (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Anwendung von Satz 3.18 auf $\overline{A}$ (NB: $\overline{A}^* = A^*$)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) vgl. 1. Abs. im Beweis (ii) $\Rightarrow$ (iii) von Satz 3.18