3.3. Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Warnung: $\nexists$ Spektralsatz oder Funktionalkalkül für allg. symmetrische Operatoren – selbstadjungiert ist entscheidend!

[vgl. auch Bem. 3.11(i): A nicht abgeschl., dicht def.

$\Rightarrow \operatorname{spec}(A) = \mathbb{C}$]

(beinhaltet dicht def.)

$\boxed{\text{3.20. Lemma}}$ Sei $A : \operatorname{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symm. & abgeschlossen.

Dann gilt: A selbstadjungiert $\Longleftrightarrow \operatorname{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$

Beweis.

Es gilt $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0 \ : \ z := \lambda + i\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Setze $\tilde{A}_z := \frac{1}{\mu}(A - \lambda)$, $\operatorname{dom}(\tilde{A}_z) := \operatorname{dom}(A)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\forall \psi \in \operatorname{dom}(A): \\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\end{array} \quad \|(A-z)\psi\|^2 = \mu^2 \underbrace{\|(\tilde{A}_z - i)\psi\|^2}_{\|\tilde{A}_z\psi\|^2 + \|\psi\|^2} \geq \mu^2 \|\psi\|^2$$

$$\begin{array}{c}\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ \Rightarrow\end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (A-z)^{-1} : \operatorname{ran}(A-z) \to \operatorname{dom}(A) & \text{existiert und ist} \\ \qquad\qquad \| & \text{stetig} \\ \qquad \operatorname{ran}(\tilde{A}_z - i) & \end{array} \right\} \quad (*)$$

Somit

$$A \text{ selbstadj.} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{A}_z \text{ selbstadj.} \\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \end{array} \right\} \overset{\text{Satz 3.18}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{ran}(\tilde{A}_z - i) = \mathcal{H} \\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \end{array} \right\} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} z \in \rho(A) \\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

3.21. Satz (Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform)

Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann $\exists$ Maßraum (Λ, Σ, μ), $\sigma : \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar, sowie $U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda)$ unitär, so dass

NB: hier $L^2(\Lambda) \equiv L^2(\Lambda, \mu)$

(a) $\psi \in \mathrm{dom}(A) \iff \sigma \cdot U\psi \in L^2(\Lambda)$

(b) $UAU^* = M_\sigma$ mit $\mathrm{dom}(M_\sigma) := \{ f \in L^2(\Lambda) : \sigma f \in L^2(\Lambda) \}$

[Falls $\mathcal{H}$ separabel, so kann (Λ, Σ, μ) σ-endlich gewählt werden.]

3.22. Bemerkung

M_σ ist selbstadj. Multipl.op. mit Fkt. σ auf max. Def.bereich (vgl. Bsp. 3.15 (i))

Beweis von Satz 3.21.

Strategie: Rückführung auf Spektralsatz für beschränkte, normale Operatoren

Lemma 3.20 $\Rightarrow$ $-i \in \rho(A)$, d.h. $R := (A+i)^{-1} \in BL(\mathcal{H})$ existiert

Beh.: $R^* = (A-i)^{-1}$, insbes. R normal (Satz 3.12)

da: Satz 3.18 $\Rightarrow$ $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{dom}(A)$ mit $(A-i)\varphi_1 = \psi_1$ und $(A+i)\varphi_2 = \psi_2$

$$\Rightarrow \langle \psi_1, R\psi_2 \rangle = \langle (A-i)\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, (A+i)\varphi_2 \rangle = \langle (A-i)^{-1}\psi_1, \psi_2 \rangle \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Spektralsatz für beschr. normale Op.:

$\exists$ Maßraum (Λ, Σ, μ), $\exists\, g: \Lambda \to \mathbb{C}$ messbar, beschränkt und $\exists$
$U: \mathcal{H} \to L^2(\Sigma)$ unitär mit $URU^* = M_g$ auf $L^2(\Lambda)$

„Beweis von $A = \frac{1}{R} - i$ ":

R injektiv $\Rightarrow$ M_g injektiv $\Rightarrow$ $\{\lambda \in \Lambda : g(\lambda) = 0\}$ ist μ-Nullmenge

$\Rightarrow$ $\sigma(\lambda) := \frac{1}{g(\lambda)} - i$ ist μ-f.ü. def. auf Λ

zu (a): "$\Rightarrow$" $\psi \in \mathrm{dom}(A)$ $\Rightarrow$ $\exists \varphi \in \mathcal{H}$: $\psi = R\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{U\psi = U\underset{U^*U}{R\varphi} = g\,U\varphi}\;(*) \Rightarrow \sigma U\psi = \underbrace{\sigma g}_{\in L^\infty(\Lambda)} \underbrace{U\varphi}_{\in L^2(\Lambda)} \in L^2(\Lambda)$$

"$\Leftarrow$" sei $\sigma U\psi \in L^2(\Lambda)$ für $\psi \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}$ mit $U\varphi = (\sigma + i)\, U\psi$

$\Rightarrow$ $gU\varphi = U\psi \in L^2(\Lambda)$

$\Rightarrow$ $\psi = U^* M_g U\varphi = R\varphi \in \mathrm{dom}(A)$

zu (b) nach (a) gilt: $U\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(M_\sigma)$

sei $\psi \in \mathrm{dom}(A) \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{H}$ mit $\psi = R\varphi$ $\Rightarrow$ $A\psi = \varphi - i\psi$

und $$UA\psi = \underbrace{U\varphi}_{\frac{1}{g}U\psi\ (*)} - i\,U\psi = \left(\frac{1}{g} - i\right) U\psi = M_\sigma U\psi \in L^2(\Lambda)$$

$\Rightarrow$ $UAU^* = M_\sigma$ auf $\mathrm{dom}(M_\sigma)$

$\blacksquare$

3.23. Satz (Messbares Funktionalkalkül)

Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann $\exists_1\ \hat{\Phi}$:

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to BL(\mathcal{H})$, so dass

(a) $\hat{\Phi}$ ist $*$-Algebra-Homomorphismus

(b) $\hat{\Phi}$ stetig und $\underbrace{\|\hat{\Phi}(h)\|}_{\text{Operator-Norm}} \leq \|h\|_\infty \quad \forall\, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(c) Falls $(h_n)_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\lambda) = \lambda \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

und $|h_n(\lambda)| \leq \lambda \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(h_n)\psi = A\psi \quad \forall\, \psi \in \mathrm{dom}(A)$$

(d) Falls $(h_n)_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ punktweise und

$\sup\limits_n \|h_n\|_\infty < \infty$, dann gilt

$$\hat{\Phi}(h_n) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{\Phi}(h) \quad \text{stark}.$$

(e) Falls $A\psi = \lambda\psi$, dann $\hat{\Phi}(h)\psi = h(\lambda)\psi \quad \forall\, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(f) Falls $h \geq 0$, dann $\hat{\Phi}(h) \geq 0$

Notation: $h(A) \equiv \hat{\Phi}(h)$

Beweisidee. Für $h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ verwende Satz 3.21 und setze

$$h(A) := U^* M_{h\circ\sigma}\, U \in BL(\mathcal{H})$$

■

3.24. Lemma Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert.

Dann def.

$$P : \begin{array}{l} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \text{Orthog. projektoren auf } \mathcal{H} \\ B \mapsto \chi_B(A) =: P(B) \end{array}$$

ein projektorwertiges Maß, das Spektralmaß zu A.

Beweis: (einfache) Übung!

3.25. Bemerkung: Das Spektralmaß zu A hat i.A. keinen kompakten Träger, d.h. i.A. $\nexists\, K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $\chi_K(A) = \mathbb{1}$ (im Gegensatz zu Kap. 1!)

$\boxed{\text{3.26. Satz}}$ (Spektralsatz)

$\exists$ 1-zu-1-Zuordnung zwischen selbstadjungierten Operatoren A auf $\mathcal{H}$ und Spektralmaßen P auf $\mathcal{H}$, für die gilt

$$A = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\ \lambda$$

$$\operatorname{dom}(A) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\ \lambda^2 < \infty \right\}$$

$$\mu_\psi := \langle \psi, P(\cdot)\psi \rangle$$

sowie $P := \chi_\cdot(A)$.

Weiterhin ist $\forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-messbar (nicht notw. beschr.)

$$f(A) := \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\ f(\lambda) \tag{1}$$

$$\operatorname{dom}(f(A)) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\ |f(\lambda)|^2 < \infty \right\} \tag{2}$$

normal mit $(f(A))^* = \overline{f}(A)$.

Spezialfälle:
- f reellwertig $\Rightarrow$ $f(A)$ selbstadjungiert
- f beschränkt $\Rightarrow$ $f(A)$ stimmt mit messb. Funktionalkalkül überein

Beweisidee.

- selbstadj. Op. $\to$ Spektralmaß; siehe Lemma 3.24
- Spektralmaß $\to$ selbstadj. Op.:

(i) sei $\mu_{\varphi,\psi} := \langle \varphi, P(\cdot)\psi \rangle$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, f(\lambda) \quad \text{wohldef. } \forall \varphi \in \mathcal{H}\ \forall \psi \in \operatorname{dom}(f(A))$$
wie in (2)

da für $f = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j}$ (paarw. disj.): $\left| \sum_j \mu_{\varphi,\psi}(B_j)\, \alpha_j \right|$

$$\leq \sum_j \mu_{\varphi,\varphi}(B_j)^{1/2}\, \mu_{\psi,\psi}(B_j)^{1/2}\, |\alpha_j|$$

$$\leq \underbrace{\Big(\sum_j \mu_{\varphi,\varphi}(B_j)\Big)^{1/2}}_{\leq 1} \underbrace{\Big(\sum_j \mu_{\psi,\psi}(B_j)\, |\alpha_j|^2\Big)^{1/2}}_{\int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\, |f(\lambda)|^2}$$

(allg. Fall durch Approx!)

$$\Rightarrow \text{def. Operator } f(A) \text{ via } \langle \varphi, f(A)\psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, f(\lambda)$$

(ii) $\operatorname{dom}(f(A))$ dicht in $\mathcal{H}$!

für $n \in \mathbb{N}$, sei $K_n := \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| \in [n-1, n[\,\}$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} P(K_n) = \mathbb{1} \quad \text{(starke Kgz.!)}$$

d.h. $\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{ran}(P(K_n))}_{\subseteq \operatorname{dom} f(A)}$ dicht in $\mathcal{H}$

(iii) $\operatorname{dom}(f(A))$ ist max. Def. bereich:

$$\| f(A)\psi \|^2 = \langle f(A)\psi, f(A)\psi \rangle = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\mu_{f(A)\psi,\psi}(\lambda)\, f(\lambda)}_{\sum_j \mu_{f(A)\psi,\psi}(B_j)\, \alpha_j}$$

für $f = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j}$ gilt:

$$\mu_{f(A)\psi,\psi}(B_j) = \langle f(A)\psi, P(B_j)\psi \rangle = \overline{\alpha_j}\, \langle \psi, P(B_j)\psi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \|f(A)\psi\|^2 = \sum_j \mu_\psi(B_j)\,|w_j|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\,|f(\lambda)|^2$$

gilt mittels Approx.argument für bel. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar.

(iv) $\quad \left(f(A)\right)^* = \bar{f}(A)$, da

$$\langle \varphi, f(A)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda)\, f(\lambda) = \overline{\int_{\mathbb{R}} d\mu_{\psi,\varphi}(\lambda)\, \overline{f(\lambda)}}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=} \overline{\langle \psi, \bar{f}(A)\varphi \rangle} = \langle \bar{f}(A)\varphi, \psi \rangle$$

$\bar{f}(A)\varphi \in \mathcal{H}$
$\Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{dom}(f(A))$

∎