3.4. Quadratische Formen und selbstadjungierte Erweiterungen

Ziel. Konstruktion eines Def.bereichs, auf dem ein geg. symm. Operator selbstadj. ist

3.27. Definition

Sei $Q \subseteq \mathcal{H}$ dichter, linearer Unterraum

$$q: \begin{array}{l} Q \times Q \to \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) \mapsto q(\varphi, \psi) \end{array} \qquad \text{sesqui-linear}$$

(halb-linear links!)

heißt quadratische Form mit Form-Def.bereich Q ($\equiv$ auf Q)

- q symmetrisch $:\Leftrightarrow$ $q(\varphi,\psi) = \overline{q(\psi,\varphi)}$ $\forall \varphi, \psi \in Q$

- q positiv (besser: nicht-negativ) $:\Leftrightarrow$ $q(\psi,\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in Q$

- q halbbeschränkt (von unten mit Konstante $M > 0$) $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q(\psi,\psi) \geq -M \|\psi\|^2 \\ \forall \psi \in Q \end{array} \right.$

(positiv $\Rightarrow$ halbbeschränkt $\Rightarrow$ symmetrisch, falls $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$)

- sei q halbbeschränkt mit Konst. M.

  q abgeschlossen $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ ist vollständig bzgl. Norm} \\ |||\psi||| := \left(q(\psi,\psi) + (M+1)\|\psi\|^2 \right)^{1/2} \end{array} \right.$

- sei q abgeschlossen und $\mathcal{D} \subseteq Q$.

$$\mathcal{D} \text{ form core von } q \;:\Longleftrightarrow\; \overline{\mathcal{D}}^{|||\cdot|||} = Q$$

$\boxed{\text{3.28 Lemma}}$ Sei q eine quadr. Form auf Q. Dann gilt

$$q \text{ abgeschlossen} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall (\varphi_n)_n \subset Q \text{ mit } \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi \text{ in } \mathcal{H} \text{ und} \\ \lim\limits_{n,m\to\infty} q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = 0 \text{ gilt:} \\ \varphi \in Q \text{ und } \lim\limits_{n\to\infty} q(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n) = 0 \end{cases}$$

Beweis: Die Vor. rechts ist äquivalent zu $(\varphi_n)_n$ ist Cauchy bzgl. $|||\cdot|||$ ∎

$\boxed{\text{3.29. Lemma}}$ Zu $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert gibt es eine quadr. Form

$$Q_A := \{ \psi \in \mathcal{H} : \int_\Lambda d\mu(\lambda)\, |\sigma(\lambda)|\, |(U\psi)(\lambda)|^2 < \infty \}$$

← Spektraldarst. von A in Mult.op.form

$$q_A(\varphi,\psi) := \int_\Lambda d\mu(\lambda)\, \sigma(\lambda)\, \overline{(U\varphi)(\lambda)}\, (U\psi)(\lambda)$$

mit $Q_A \supseteq \mathrm{dom}(A)$.

Falls $A \geq -M$ $(M \geq 0) \Rightarrow q_A$ halbbeschränkt (mit Konstante M) und abgeschlossen. Jeder (Operator-) core von A ist form core von q_A und

$$Q_A = \mathrm{dom}\left((A+M)^{1/2}\right)$$

$$q_A(\varphi,\psi) = \langle (A+M)^{1/2}\varphi, (A+M)^{1/2}\psi \rangle - M \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi,\psi \in Q_A$$

sowie $q_A(\varphi,\psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi \in Q_A\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$

<u>Beweis</u>. • q_A wohldef. symm. quadr. Form auf Q_A wegen Cauchy-Schwarz.

Da $|\sigma(\lambda)| \leq 1 + |\sigma(\lambda)|^2 \Rightarrow \mathrm{dom}(A) \subseteq Q_A$

• Für den Rest sei o.E. $M=0$ (sonst ersetze $q \to q+M$, $A \to A+M$)

$A \geq 0 \Rightarrow \sigma(\lambda) \geq 0$ μ-f.ü.

$$\Rightarrow (1) \quad |||\psi|||^2 \leq \|\psi\|^2 + \|\psi\|\|A\psi\| \leq \tfrac{3}{2}\left(\|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2\right) \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$$

$$(2) \quad Q_A = \mathrm{dom}(A^{1/2}) \quad \wedge \quad q_A(\varphi,\psi) = \langle A^{1/2}\varphi, A^{1/2}\psi\rangle \quad \forall \varphi, \psi \in Q_A$$

(messb. Funkt.kalkül, Satz 3.23)

insbes.: $|||\psi|||^2 = \|\psi\|^2 + \|A^{1/2}\psi\|^2 \quad \forall \psi \in Q_A$

• Somit q_A abgeschlossen, da $|||\cdot|||$ = Graphennorm des selbstadj. ($\Rightarrow$ abgeschl.) Operators $A^{1/2}$.

• Sei $\mathcal{D}$ Operator-core von A $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ dicht in $\mathrm{dom}(A)$ bzgl. $(\|\cdot\|^2 + \|A\cdot\|^2)^{1/2}$ $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ auch dicht bzgl. $|||\cdot|||$

Somit folgt $\mathcal{D}$ form core von q_A aus

<u>Beh.</u>: $\overline{\mathrm{dom}(A)}^{|||\cdot|||} = Q_A$

<u>Bew.</u>: sei $\varphi \in Q_A$, $K_n := \{\lambda \in \Lambda : \sigma(\lambda) \in [0, n[\,\}$

$$\Rightarrow \int_\Lambda d\mu(\lambda)\, \sigma(\lambda)^2 \left|\chi_{K_n}(\lambda)(U\varphi)(\lambda)\right|^2 < \infty \Rightarrow \underbrace{U^* M_{K_n} U\varphi}_{=:\varphi_n} \in \mathrm{dom}(A)$$

$$\text{und} \quad |||\varphi - \varphi_n|||^2 = \int_\Lambda d\mu(\lambda)\,(1+\sigma(\lambda))\,(1-\chi_{K_n}(\lambda))\,|U\varphi(\lambda)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{(dom. Kgz.)}$$

$\boxtimes$

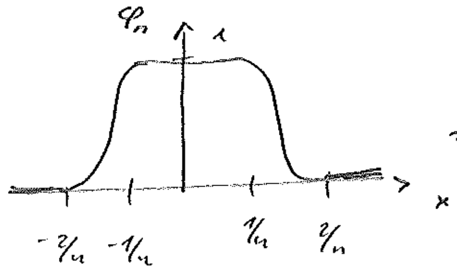
3.30. Beispiel $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$Q := C_c^\infty(\mathbb{R}) \,, \quad q(\varphi,\psi) := \overline{\varphi(0)}\,\psi(0)$$

is symm., pos. quadratische Form.

Aber: q nicht abgeschlossen und besitzt auch keine abgeschlossene Erweiterung $\tilde{q}|_Q = q$, $\tilde{Q} \supseteq Q$,

da:



$\Rightarrow$ • $\underset{\in Q}{\varphi_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $L^2(\mathbb{R})$

• $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = 0 \quad \forall n,m$

• $q(\varphi_n - 0, \varphi_n - 0) = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow$

$\nexists$ Operator A selbstadj. mit $\operatorname{dom}(A) \supset C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \overline{\varphi(0)}\,\psi(0) \quad \forall \varphi,\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Moral: • Halbbeschr. Operator A hat immer abgeschlossene Erweiterung A^{**} aber nicht notwendigerweise selbstadj. Erweiterung

• Halbbeschr. quadratische Form hat nicht notw. abgeschl. Erweiterung; falls aber doch, dann gilt Umkehrung von Lemma 3.28

$\boxed{\text{3.31. Satz}}$ Sei q abgeschl., halbbeschr., quadr. Form auf $Q \subseteq \mathcal{H}$.

Dann $\exists_1$ $A: \operatorname{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadj. mit $\operatorname{dom}(A) \subseteq Q$,

$\overline{\operatorname{dom}(A)}^{\|\cdot\|_q} = Q$ und $q(\varphi,\psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi,\psi \in \operatorname{dom}(A)$

Beweis. O.E. sei $q \geq 0$ (sonst ersetze q durch $\tilde{q} := q + M\langle\cdot,\cdot\rangle$)

q symm. $\Rightarrow$ $\langle\!\langle \varphi,\psi \rangle\!\rangle := q(\varphi,\psi) + \langle \varphi,\psi\rangle$ ist Skalarprodukt auf Q

q abgeschl. $\Rightarrow$ Q ist Hilbert-Raum bzgl. $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$

(i) Die kanon. Einbettungen

$$\underbrace{(Q, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)}_{=:\,\mathbb{H}} \xhookrightarrow{i} \mathcal{H} \xhookrightarrow{j} (Q, \langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle)^* = \mathbb{H}^*$$

$$i(\varphi) := \varphi \quad \forall \varphi \in Q$$

$$j(\psi) := \langle \psi, \cdot\rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

sind (semi-) linear, injektiv (i: klar; j: da $\overline{Q}^{\|\cdot\|} = \mathcal{H}$) u. stetig

da: $\|i(\varphi)\|^2 = \|\varphi\|^2 \overset{q\geq 0}{\leq} |\!|\!|\varphi|\!|\!|^2$

$$\|j(\psi)\|_{Q^*} := \sup_{0\neq\varphi\in Q} \frac{|(j(\psi))(\varphi)|}{|\!|\!|\varphi|\!|\!|} = \sup_{0\neq\varphi\in Q} \frac{|\langle\psi,\varphi\rangle|}{|\!|\!|\varphi|\!|\!|} \overset{\text{CS-Ugl.}}{\leq} \|\psi\| \sup_{0\neq\varphi\in Q} \frac{\|\varphi\|}{|\!|\!|\varphi|\!|\!|} \leq \|\psi\|$$

Riesz-Darstellung:

$$\ell : \begin{array}{l} \mathbb{H} \to \mathbb{H}^* \\ \varphi \mapsto \ell(\varphi) := \langle\!\langle \varphi, \cdot \rangle\!\rangle \end{array}$$ ist anti-unitär (semi-linear, bijektiv, isometrisch)

Definiere linearen Operator

$$\boxed{B : \begin{array}{l} \underbrace{\{\varphi \in \mathbb{H} : \ell(\varphi) \in \operatorname{ran} j\}}_{=:\,\operatorname{dom}(B)} \to \mathcal{H} \\ \varphi \mapsto j^{-1} \circ \ell \end{array}}$$

Somit

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\ell"'] & \mathcal{H} \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{H}^* \arrow[ll, bend left, "\ell^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(ii) $\overline{\mathrm{dom}(B)}^{\|\cdot\|} = \mathcal{H}$, da:

- $\underline{\mathrm{ran}\, j \text{ dicht in } \mathbb{H}^*}$ (bzgl. Dualraum-Norm),

  da sonst $\exists\, 0 \neq F \in \mathbb{H}^*$, so dass $\forall\, \psi \in \mathcal{H}$

$$0 = \langle\!\langle j(\psi), F \rangle\!\rangle_{\mathbb{H}^*} \overset{\text{Riesz}}{=} \langle\!\langle \ell^{-1}(j(\psi)), \underbrace{\ell^{-1}(F)}_{=:\eta_F} \rangle\!\rangle$$

$$\overset{\text{Def. von } \ell}{=} \left[\ell\left(\ell^{-1}(j(\psi))\right)\right](\eta_F)$$

$$= [j(\psi)](\eta_F) = \langle \psi, \eta_F \rangle$$

$$\Rightarrow \eta_F = 0 \Rightarrow F = 0 \quad \lightning$$

- ℓ anti-unitär $\Rightarrow$ $\ell^{-1}(\mathrm{ran}\, j)$ dicht in $\mathbb{H}$ bzgl. $|||\cdot|||$

  $\Rightarrow$ dicht in $\mathbb{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$, da $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$

  $\Rightarrow$ dicht in $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$, da $\mathbb{H}$ dicht $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$

(iii) $B \subseteq B^*$ (symm.), da $\forall\, \varphi, \psi \in \mathrm{dom}(B)$

$$\langle \psi, B\varphi \rangle = \langle \psi, j^{-1}(\ell(\varphi)) \rangle = \overline{\underbrace{\langle j^{-1}(\ell(\varphi)), \psi \rangle}_{[\underbrace{j(j^{-1}(\ell(\varphi)))}_{\ell(\varphi)}](\psi)}}$$

$$= \overline{\langle\!\langle \varphi, \psi \rangle\!\rangle} = \langle\!\langle \psi, \varphi \rangle\!\rangle \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \langle B\psi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, B\psi \rangle} \underset{\substack{(*) \text{ mit} \\ \varphi \leftrightarrow \psi}}{=} \overline{\langle\!\langle \varphi, \psi \rangle\!\rangle} = \langle\!\langle \psi, \varphi \rangle\!\rangle$$

✓

(iv) $B = B^*$, da: definiere

$C := \ell^{-1} \circ j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist symmetrisch, da $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\langle \varphi, C\psi \rangle = \langle \varphi, (\ell^{-1} \circ j)\psi \rangle = [j(\varphi)]((\ell^{-1} \circ j)(\psi))$$

$$= \langle\langle (\ell^{-1} \circ j)\varphi, (\ell^{-1} \circ j)\psi \rangle\rangle$$

$\Rightarrow$ symmetrisch wie in (iii)

da $\mathrm{dom}(C) = \mathcal{H}$ $\Rightarrow$ C selbstadj. und beschränkt

(Hellinger-Töplitz, Kor. I.4.18)

$\Rightarrow$ Spektralsatz in Multipl.op.form : $UCU^* = M_\sigma$

$U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu)$ unitär

vgl. $\sigma : \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar, beschr.

C injektiv $\Rightarrow$ • $\{\lambda \in \Lambda : \sigma(\lambda) = 0\}$ ist μ-Nullmenge

• $C^{-1} : \mathrm{ran}(C) \to \mathcal{H}$ surjektiv

• $UC^{-1}U^* = M_{1/\sigma}$ auf $U(\mathrm{ran}(C))$ selbstadj.

da $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{dom}(B)$ dicht in $\mathcal{H}$ nach (ii) $\Rightarrow$ $U(\mathrm{ran}(C))$ dicht in $L^2(\Lambda, \mu)$ und max. Def.bereich von $M_{1/\sigma}$

da C^{-1} surjektiv

$\Rightarrow$ $B = C^{-1}$ selbstadj.

(v) $\boxed{A : \mathrm{dom}(B) \to \mathcal{H} , \quad A := B - \mathbb{1}}$ selbstadj. und

$$\boxed{\langle \psi, A\varphi \rangle} \overset{(*)}{=} \langle\langle \psi, \varphi \rangle\rangle - \langle \psi, \varphi \rangle =$$

$$\boxed{= q(\psi, \varphi)} \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{dom}(B) \subseteq Q$$

(vi) Eindeutigkeit:

Übung, benutze Lemma 3.29

■

3.32. Bemerkung

Falls $A = A^* \subseteq B = B^* \Rightarrow A = B$, aber

$\exists$ a, b abgeschl., halbbeschr. quadr. Formen mit $a \subsetneq b$,

$$b|_{Q_a \times Q_a} = a \quad \text{und} \quad Q_b \supsetneq Q_a$$

3.33 Beispiel:

$$\mathcal{H} = L^2(]0,1[)$$

schwach

$$Q_N := H^1(]0,1[) \qquad q_N(\varphi,\psi) := \langle \varphi', \psi' \rangle$$

$$Q_D := H^1_0(]0,1[) := \overline{C_c^\infty(]0,1[)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$$

Sobolev-Norm von H^1

$$q_D(\varphi,\psi) := \langle \varphi', \psi' \rangle$$

$\boxed{\text{3.34. Satz}}$

Sei Δ_D, bzw. Δ_N der via Satz 3.31 zur Form q_D, bzw. q_N gehörende selbstadjungierte Operator. Dann gilt

- $$\mathcal{D}_D := \{ \varphi \in C^\infty(]0,1[) : \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \to 1}} \varphi(x) = 0 \} \text{ ist}$$

  Operator core von Δ_D und $\Delta_D \varphi = -\varphi'' \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_D$

  Dirichlet-Laplace-Operator

- $$\mathcal{D}_N := \{ \varphi \in C^\infty(]0,1[) : \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \to 1}} \varphi'(x) = 0 \} \text{ ist}$$

  Operator core von Δ_N und $\Delta_N \varphi = -\varphi'' \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_N$

  Neumann-Laplace-Operator

Beweis: z.B. Reed/Simon, Bd 4, Seite 264.

Satz 3.31 setzt Abgeschlossenheit der Form voraus.

Halbbeschr. Operatoren erzeugen abschließbare Formen

$\Rightarrow$ haben selbstadj. Erweiterung:

$\boxed{3.35.\ \text{Satz}}$ (Friedrichs-Erweiterung)

Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrischer halbbeschr. Operator.

Dann ist die Form $q_A : \mathrm{dom}(A) \times \mathrm{dom}(A) \to \mathbb{C}$, $(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi, A\psi \rangle$

halbbeschränkt und abschließbar mit Abschluss $\hat{q}$,

d.h. $\hat{Q} = \overline{\mathrm{dom}(A)}^{\|\cdot\|}$ und $\hat{q}\big|_{\mathrm{dom}(A)\times\mathrm{dom}(A)} = q$.

Für den mittels Satz 3.31 der Form $\hat{q}$ zugeordneten selbstadj. Operator $\hat{A}$ gilt:

- $\hat{A}$ halbbeschr. (mit gleicher Konst. wie A)
- $\hat{A} \supseteq A$
- $\hat{A}$ ist einzige selbstadj. Erweiterung von A mit
  - $\mathrm{dom}(\hat{A}) \subseteq \hat{Q}$
  - $\hat{q}(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \hat{A}\psi \rangle \quad \forall \varphi \in \hat{Q}\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(\hat{A})$

3.36. Beispiel $\mathcal{H} = L^2(]0,1[)$

$\mathrm{dom}(A) = C_c^\infty(]0,1[) \qquad A\psi = -\psi'' \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$

$\Rightarrow$ Δ_D ist Friedrichs-Erweiterung von A, da

- $\hat{Q} = \overline{C_c^\infty(]0,1[)}^{\|\cdot\|_{1,2}} = H_0^1(]0,1[)$
- $\mathrm{dom}(\Delta_D) = \overline{\{\psi \in C^\infty(]0,1[) : \lim_{x\to 0,\, x\to 1} \psi(x) = 0\}}^{\text{Graphennorm}} \subseteq \hat{Q}$

Beweis von Satz 3.35, o.E. sei $A \geq 0$

Vervollst. bzgl. Norm $q_A(\psi,\psi) + \|\psi\|^2$

Setze $\mathbb{H} := \overline{\mathrm{dom}(A)}$ Hilbert-Raum mit

Skalarprodukt $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ es gilt:

$$\langle\langle \varphi,\psi\rangle\rangle = q_A(\varphi,\psi) + \langle\varphi,\psi\rangle \quad \forall\ \varphi,\psi \in \mathrm{dom}(A)$$

Also ist klar: $\hat{q}(\varphi,\psi) := \langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle - \langle\varphi,\psi\rangle$, $\hat{Q} := \mathbb{H}$,

ist abgeschl. positive quadr. Form, $\hat{q} \supseteq q$.

$\overset{\text{Satz 3.31}}{\Rightarrow}$ $\exists_1\ \hat{A} : \mathrm{dom}(\hat{A}) \to \mathcal{H}$ selbstadj. mit $\mathrm{dom}(\hat{A}) \subseteq \hat{Q}$

und $\hat{q}(\varphi,\psi) = \langle\varphi, \hat{A}\psi\rangle \quad \forall \varphi \in \hat{Q}\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(\hat{A})$

Zeige $\hat{A} \supseteq A$

sei $\varphi \in \mathrm{dom}(A)$, sei $\psi \in \mathrm{dom}(\hat{A}) \underset{\hat{q}\text{ abgeschl.}}{\Rightarrow} \exists (\psi_n)_n \subset \mathrm{dom}(A)$:

$\psi_n \overset{n\to\infty}{\to} \psi$, $\hat{q}(\varphi, \psi - \psi_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\Rightarrow \langle A\varphi,\psi\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle A\varphi, \psi_n\rangle} = \hat{q}(\varphi,\psi) =$$

$$\langle\varphi, A\psi_n\rangle = q_A(\varphi,\psi_n) = \hat{q}(\varphi,\psi_n)$$

$$= \langle\varphi, \hat{A}\psi\rangle$$

$\Rightarrow \varphi \in \mathrm{dom}(\underbrace{\hat{A}^*}_{\hat{A}}) \Rightarrow \mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(\hat{A})$ und

$\hat{A}|_{\mathrm{dom}(A)} = A$ ✓

„Eindeutigkeit"

Sei $\tilde{A} \supseteq A$ selbstadj. mit $\mathrm{dom}(\tilde{A}) \subseteq \hat{Q}$

$\overset{\text{analoges Argument}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{dom}(\tilde{A}) \subseteq \mathrm{dom}(\hat{A})$, also $\tilde{A} \subseteq \hat{A}$

$\Rightarrow \tilde{A} = \hat{A}$

$\blacksquare$